Сайт "Професійні ресурси документознавства"

КАБІНЕТ МІНІСТРІВ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
Кафедра автоматизації сільськогосподарського виробництва

КУЗЬМЕНКО Б.В., ЛИСЕНКО В.П.

СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ
(конспект лекцій)

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів вищих навчальних закладів освіти
спеціальність 6.050101 «Комп'ютерні науки»

КИЇВ – 2009

УДК 32.81

www.documentoved.at.ua

У навчальному посібнику викладено матеріали (конспект лекцій) з нормативної дисципліни «Сучасна теорія управління» для студентів спеціальності 6.050101 «Комп'ютерні науки».

Рекомендовано до видання вченою радою факультету енергетики і автоматики Національного університету біоресурсів і природокористування (НУБІП).

Укладачі: Кузьменко Б.В., доктор технічних наук, професор, Лисенко В.П., кандидат технічних наук, професор

Рецензенти: Директор Інституту вугільних енерготехнологій НАНУ, доктор технічних наук, професор, академік НАНУ Майстренко О.Ю., Завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій Національного університету харчових технологій, Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор Ладанюк А.П., Професор кафедри комп'ютерних наук Національного університету культури і мистецтв, доктор педагогічних наук, професор Матвієнко О.В.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ
(конспект лекцій)

НАВЧАЛИЙ ПОСІБНИК

для студентів вищих навчальних закладів освіти
спеціальність 6.050101 «Комп'ютерні науки»

Укладач: КУЗЬМЕНКО Борис Володимирович
ЛИСЕНКО Віталій Пилипович
Зав. Видавничим центром НУБІП А.П. Колесніков

Редактор Кузьменко Б.В. (у авторській редакції)

Підписано до друку Формат 60× 83
Ум. друк. арк. Обл. вид. арк.
Наклад 100 прим. Зам. №

Видавничий центр НУБІП
03041, Київ, вул. Героїв Оборони, 15

ВСТУП.

Виникнення кібернетики як науки про управління пов'язано із загальним технічним прогресом, розвитком продуктивних сил у сучасну епоху. До появи кібернетики основні напрямки розвитку техніки характеризувалися, по-перше, створенням пристроїв для отримання і перетворення енергії (наприклад, парові машини, турбіни, генератори електричної енергії), по-друге, створенням пристроїв для дії на навколишнє середовище. Основна увага у цих пристроях приділяється енергетичним співвідношенням. Найважливішими показниками їх роботи є коефіцієнт корисної дії. Відносно простота технічних пристроїв не ставила проблему управління ними на особливе місце. Людина одночасно працювала і управляла об'єктом своєї роботи, необхідну для управління інформацію вона отримувала безпосередньо від органів своїх чуттів, спостерігаючи за результатами роботи.

Прогрес техніки усередині XX ст. призвів до створення настільки складних технічних систем, задачі управління якими стали перевищувати фізіологічні можливості людини. Наприкінці другої світової війни такою задачею була задача створення автоматичної системи управління зенітним вогнем, яка для швидкостей літаків, порівнюваних із швидкістю зенітного снаряду, могла б без участі людини слідкувати за курсом літаків, здійснювати розрахунок їх траєкторій та наведення гармат. У таких системах на перше місце стають задачі отримання інформації про навколишню обстановку, обробки цієї інформації з метою видобутку з неї придатних для управління даних та використання цієї інформації для здійснення цілеспрямованих дій, тобто задача створення пристроїв, необхідних для *зв'язку та управління.* Необхідність розв'язку цих задач призвела до швидкого прогресу у галузі теорії зв'язку, обчислювальної техніки і автоматики, що поклало започаткувало розвитку тих ідей, які пізніше стали фундаментом кібернетики.

Поняття *системи*, поряд з поняттям *управління* є фундаментальними поняттями кібернетики. Будь-яка реальна система складається з конкретних об'єктів, якими можуть бути технічні пристрої, люди, які управляють цими пристроями, матеріальні ресурси та ін. Ці об'єкти пов'язані між собою та з навколишнім середовищем певними зв'язками, які є силами, потоками енергії, речовини та інформації. Проте кібернетика абстрагується від фізичного наповнення властивостей об'єктів та зв'язків і розглядає реальну систему як абстрактну множину елементів, наділених спільними властивостями та наявними зв'язками, які знаходяться один з іншим у певних співвідношеннях. Таке зображення дає змогу відмовитися від звичного розділення систем на механічні, електричні, хімічні, біологічні та ін. і увести поняття абстрактної кібернетичної системи як сукупності взаємопов'язаних, таких, що взаємодіють один з іншим, елементів.

У широкому розумінні під *управлінням* розуміють організаційну діяльність, яка здійснює функції керування чужою роботою, спрямованою на

досягнення певних цілей. Процес управління полягає у прийнятті рішень про найдоцільніші дії за умови тієї чи іншої ситуації. Роль комп'ютерної техніки (ЕОМ) надзвичайно важлива. Для того, щоб ЕОМ можна було застосувати для цілей управління, повинні бути розроблені математичні методи, які дають змогу аналізувати наявну інформацію, відсіювати непотрібну інформацію і виділяти найсуттєвішу її частину, використовувати цю інформацію для оцінки ситуації, що склалася, і напрацьовувати рекомендації, що забезпечують найбільш ефективне виконання цілій управління. Необхідність у вирішенні подібних задач призвела до появи таких розділів математики, як теорія інформації, теорія ігор, теорія статистичних розв'язків, теорія масового обслуговування, лінійне, нелінійне, динамічне ті ін. програмування, та ін. Розгляду цих та інших питань присвячено цей навчальний посібник (ч. 1, ч. 2).

1. ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ, КІБЕРНЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ

1.1. **Поняття** управління

Центральними у теорії управління (автоматичного управління) є поняття *управління* та *системи управління*. **Управління** – це цілеспрямована дія на об'єкт (керований процес), яка приводить до заданої зміни, чи підтриманню його стану. **Система управління** – це множина взаємопов'язаних елементів, зв'язна чи ціла, які приймають участь в управлінні. Поняття об'єкту, стану, цілі управління та дії потребують додаткових пояснень. На рис. 1.1. представлені основні елементи (блоки) системи, показана їх взаємодія у процесі управління об'єктом.

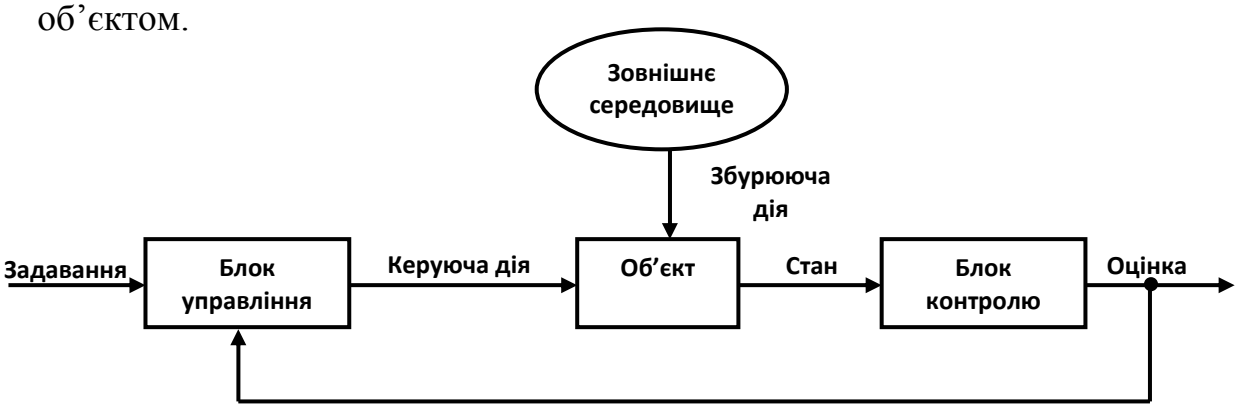


Рис. 1.1. Управління та система управління

У основі будь-якої системи управління знаходиться *керований процес*, чи *об'єкт*, на який спрямована задача управління. Відомі такі типи керованих процесів: природні , до яких відносяться процеси у живих організмах, екологічних та економічних системах; технічні, тобто механізми (роботи, станки, транспортні системи та ін.), оптичні системи, термодинамічні, хімічні виробничі процеси, та ін. *Стан* об'єкта характеризується певними кількісними параметрами, які змінюються у часі, тобто *змінними стану.* У природних процесах такими змінними можуть бути температура, густина чи вміст певної речовини у організмі чи середовищі перебування, об'єм продукції, що випускається, курс цінних паперів, та ін. Для технічних об'єктів – це механічні переміщення (кутові чи лінійні) та їх швидкості, електричні змінні, температури та концентрації речовин. *Ціллю управління* є зміна стану об'єкта у відповідності із заданим законом – *задаванням*, рис. 1.2. Така зміна відбувається у результаті дії зовнішніх факторів, серед яких виділяють: *керуючі* (ціле направлені) *дії*, які забезпечують виконання завдання; *збурюючи дії*, які перешкоджають бажаному перебігу керованого процесу. Збурюючі дії як правило викликані зовнішніми причинами, їх поява відноситься до зовнішнього оточення об'єкта, чи *зовнішнього середовища.* Наявність збурень приводить до

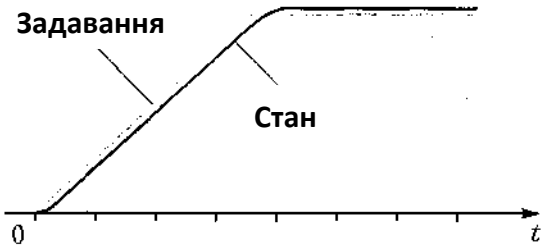


Рис. 1.2. Цілеспрямована зміна стану

того, що реальна зміна стану об'єкта завжди відрізняється від заданої (рис. 1.2). Ця відмінність, яка визначає якість роботи системи, може бути більшою чи меншою у залежності від вибраної стратегії управління, інших елементів системи та їх взаємодії у ході виконання завдання. Фізично управління об'єктом реалізується з використанням об'єктів і утворює систему управління. *Блок контролю* – це комплекс засобів, які приймають участь у оцінюванні (ідентифікації) стану об'єкта керування та/або зовнішнього середовища. До таких засобів відносяться: органи почуття живих організмів; статистичні служби економічних систем; технічні вимірювальні пристрої (давачі), а також відповідні обчислювальні пристрої (природні чи технічні), які забезпечують первинну обробку отриманої інформації. *Оцінка стану*, отримана у результаті роботи блоку контролю, використовується для управління об'єкту, що призводить до утворення *зворотних зв'язків* та реалізації принципу замкнутого управління. *Блок управління* – це комплекс факторів, які виявляють керуючу дію на об'єкт з врахуванням задавання та інформації про поточний стан об'єкта. Основні функції цього блоку зводяться до обробки інформації, тобто мають обчислювальний характер. До блоків управління природних та технічних систем відносяться: нейронні системи живих організмів; природні регулюючі фактори; штучні засоби, у ролі яких виступають як людські фактори (оператори, організатори), так і технічні пристрої (механічні, електричні блоки, ЕОМ та нейронні процесори).

У залежності від природи керованих об'єктів та інших елементів системи можна виділити біологічні, екологічні, економічні та технічні системи управління. Це системи стабілізації температури живих організмів та фокусування органів зору; стабілізація концентрації речовин у організмах та газів у атмосфері, системи управління торгівельними підприємствами, стабілізації курсу цінних паперів та регулювання попиту і пропозиції. Прикладами технічних систем різного рівня складності є: системи дискретної дії, чи автомати (побутові, торгівельні, ігрові, музичні); системи стабілізації рівня (звуку, зображення чи магнітного запису); системи управління просторовими рухами робочого механізму станка чи робота, механізмів транспортного засобу; керуючі комплекси літальних апаратів, до

складу яких входять системи автоматичного управління двигунами, рульовими механізмами, автопілоти та навігаційні системи; аерокосмічні системи, які розв'язують комплексні задачі організації (управління) польотами.

Основним предметом *теорії автоматичного управління* є системи автоматичного управління (САУ), системи автоматичного контролю, і, частково, автоматизовані системи. **Системи автоматичного управління і автоматичного контролю** – це технічні та природні системи, які виконують свої функції автоматично, без свідомої участі людини. **Автоматизовані системи** – це системи, частина функцій яких виконується автоматично, а частина – оператором (організатором).

1.2.Процеси та сигнали

Динамічним процесом, чи *рухом*, називається розвиток у часі певного фізичного явища. До процесів відносять рух механізмів, теплові явища, економічні та екологічні процеси.

Рис. 1.3. Ілюстрація зв'язку між процесом та сигналом

Процеси породжують інформаційні потоки, тобто вторинні процеси, які несуть інформацію про розглядуване фізичне явище. Процес, який містить інформацію про розвиток фізичного явища (первинного процесу), називається *сигналом*. Розглядаючи сигнал розрізняють його інформаційний вміст (інформацію про первинний процес) та фізичну природу відповідного вторинного процесу (носія). У залежності від фізичної природи носія можна виділити акустичні, оптичні, електричні та електромагнітні сигнали. У загальному випадку природа фізичного носія не співпадає з природою первинного процесу. Сигнали, як і процеси, що їх породжують, існують поза залежністю від наявності вимірювачів чи присутності спостерігача.

Розглядаються різні означення та підходи до вивчення сигналів. Розглядуване нами кібернетичне трактування цього поняття передбачає відмову від вивчення фізичної природи первинного процесу та насія сигналу. Сигнал ототожнюється з кількісною інформацією про зміну фізичних змінних процесу, що вивчається. У цьому випадку враховується, що з різних причин реальний сигнал не містить усієї інформації про розвиток фізичного явища, разом з тим він може містити сторонню інформацію. На інформаційний зміст сигналів виявляє вплив способи їх кодування, шуми та ефекти квантування. У

Процес

залежності від способів кодування розрізняють аналогові та цифрові сигнали. Для аналогових сигналів інтенсивність дії фізичного носія пропорційна, або аналогічна, фізичній змінній, що вивчається, а у цифрових сигналах інформація подана числами, наприклад, паралельними та послідовними двійковими кодами. Методи перетворення, кодування та передачі інформації вивчаються у межах прикладної теорії інформації. У теорії управління представляє інтерес адекватність закодованої інформації розглядуваній фізичній змінній. Це пов'язано з поняттями ідеального та реального сигналу. *Ідеальний сигнал* з інформаційної точки зору тотожній певній фізичній змінній $x(t)$, а *реальний сигнал* $x'(t)$ містить шуми чи завади $\delta(t)$ - сторонню інформацію про канал зв'язку, зовнішнє середовище чи вимірювача. Тому можна записати

$$x'(t) = x(t) + \delta(t).$$

З поняттям реального сигналу пов'язані задачі ідентифікації (оцінювання) динамічних процесів $x(t)$ за поточними вимірами $x'(t)$ та питання фільтрації (спостереження), згладжування та прогнозування, які також розглядаються у теорії управління.

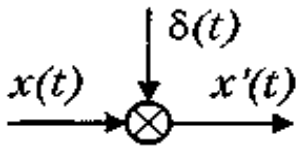


Рис. 1.4. Схема взаємозв'язку між $x(t), x'(t), \delta(t)$.

Інформаційний зміст сигналу залежить також від ефектів квантування. За характером зміни у часі процеси та сигнали поділяються на неперервні та дискретні. До останніх відносяться процеси, квантовані за рівнем та процеси, квантовані за часом. Розвиток процесу неперервного часу, неперервного чи квантованого процесу, характеризуються змінною $x(t)$, яка приймає довільні значення з числової області *X* і визначеної у будь-які моменти часу $t > t_0$, рис. 1.5, де $t_0 = 0$. До неперервних процесів відносяться неперервний механічний рух, електричні та теплові процеси. Розвиток дискретного (квантованого за рівнем) процесу характеризується змінною $x(t)$, яка приймає строго фіксовані значення $x^i, i = 0,1,2, \dots$, і визначений у будь-які

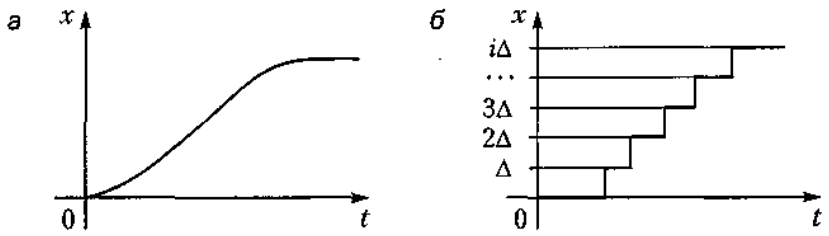


Рис. 1.5. Неперервний (а) та квантований за рівнем (б) процеси

моменти часу, рис. 1.5. б. У більшості практичних випадків можна вважати

$x^i = i\Delta, i = 0,1,2, \ldots,$

де Δ - приріст. До квантова них за рівнем процесів відносять: бінарні процеси (релейні процеси та двійкові сигнали) для яких чисельність припустимих станів n=2; переривисті процеси у дискретних автоматичних лініях; рух пневматичних роботів-маніпуляторів, які мають скінченну чисельність фіксованих положень у просторі; процеси оновлення інформації

у інформації у k - розрядних двійкових регістрах, які мають 2^k станів, а також у побудованих на їх основі цифрових пристроях та ЕОМ. У тих випадках, коли чисельність станів *n* достатньо велика чи приріст Δ малий, квантуванням за рівнем нехтують. Розвиток дискретного, квантованого за часом, процесу, чи процесу дискретного часу, характеризується змінною $x(t)$, яка приймає довільні значення у визначеній у фіксовані моменти часу t_i, де *i* = 0,1,2,…, рис. 1.6, а.

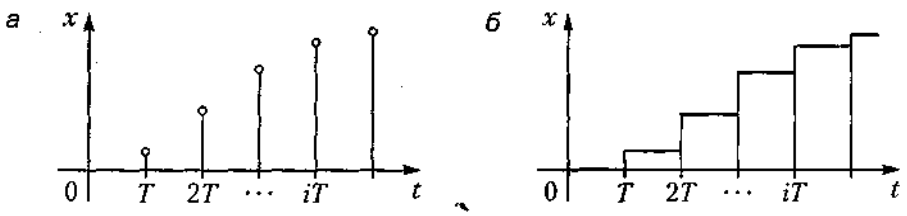


Рис. 1.6. Квантований за часом (а) та кусково-сталий (б) процеси

У більшості випадків квантування здійснюється із сталим інтервалом квантування чи дискретності *T*, тобто

$t = iT, i = 0,1,2, \ldots$

До дискретних процесів цього типу відносяться: економічні процеси, пов'язані з календарем (динаміка курсу цінних паперів, зростання цін, спадання виробництва); процеси у цифрових обчислювальних пристроях, де *T=1/f, f* – тактова частота процесора; процеси у цифрових системах управління, у яких дискретність за часом обумовлена циклічним характером обробки інформації у реальному масштабі часу (у цьому випадку *T* – тривалість оновлення інформації у вихідному регістрові керуючої ЕОМ. За умови достатньо малих, порівняно з тривалістю інших процесів, інтервалах *T* дискретністю за часом нехтують, і квантований за часом процес відносять до процесів неперервного часу. До дискретних зазвичай відносять також кусково-сталі процеси та сигнали, які характеризуються змінною $x(t)$, яка змінюється стрибкоподібно у фіксовані моменти часу t , рис. 1.6. б.

1.3. Кібернетичні блоки.

Кібернетичний блок – це блок, для якого встановлені пов'язані причинно-наслідковим відношенням вхідні та вихідні сигнали. Вихідний сигнал блоку $x_1(t)$ несе інформацію про внутрішній процес, причиною якого є вхідний сигнал $x_2(t)$. Аналіз кібернетичного блоку не передбачає знання його «улаштування» та фізичної природи процесів, що відбуваються у ньому, що визначило часто використовуваний термін «чорний ящик».

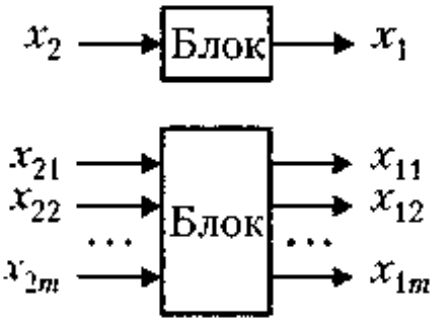


Рис. 1.7. Узагальнені схеми одно- та багатоканальних блоків

В залежності від чисельності вхідних та вихідних сигналів розрізняють одно канальні (рис. 1.7) блоки, тобто блоки з одним входом та одним виходом, та багатоканальні (рис. 1.7) з кількома входами та вихідними сигналами. Блоки, у яких відсутні вхідні сигнали, називаються автономними. За типами сигналів розрізняють неперервні, дискретні та дискретно-неперервні блоки.

Для опису кібернетичного блоку використовується одна з форм аналітичного опису зв'язку вхідних та вихідних сигналів, рис. 1.8 – диференціальні та різницеві (рекурентні) рівняння, автоматні алгоритми та ін., тобто вирази типу

$$x_1(t) = F(x_2(t)), \qquad (1.1)$$

де $F(\cdot)$ - функціональний оператор. Для найпростіших блоків такий опис можна отримати як алгебраїчне чи трансцендентне рівняння:

$$x_1 = f(x_2), \qquad (1.2)$$

де $f(\cdot)$ – функція.

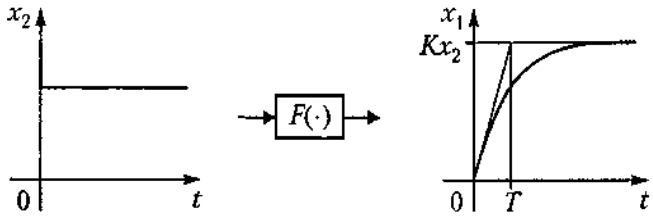


Рис. 1.8. Кібернетичний блок та перетворення сигналу

Приклад.

На рис. 1.9. зображена камера електронагрівальної печі, у якій температура t° регулюється шляхом використання електричного нагрівача, рис. 1.9. Вхідним сигналом цього блоку є напруга нагрівача $x_2(t) = U(t)$,

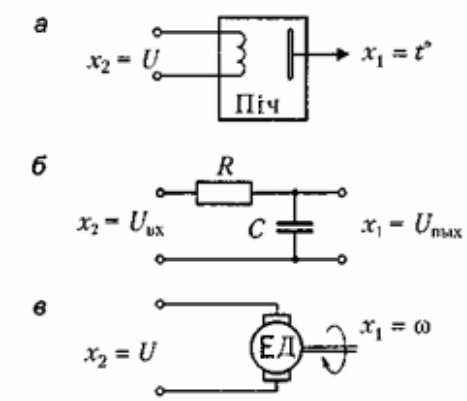


Рис. 1.9. Електронагрівальна піч ( ), *RC* – ланцюг (б), електричний нагрівач (в)

а вихідним – температура $x_1(t) = t^\circ(t)$. Зв'язок виходу і входу описується функціональним оператором (диференціальним рівнянням):

$$Tx_1(t) + x_1(t) = Kx_2(t), \qquad (1.3)$$

де *T* – стала часу, *K* – коефіцієнт передачі. Якщо напруга нагрівача стала, тобто $x_2 = U = const$, та $x_1(0) = 0$, то вихідна змінна знаходиться (рис. 1.8) за формулою

$$x_1(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)x_2. \qquad (1.4)$$

В усталеному режимі, після закінчення процесу у печі (коли $t \to \infty$), зв'язок вихідного та вхідного сигналів виявляється найпростішим алгебраїчним рівнянням типу (1.2), тобто:

$$x_1 = Kx_2.$$

Аналогічні вирази для опису зв'язків вхідних та вихідних змінних матимуть місце для електричного *RC* – ланки, рис. 1.9. б. Тут - вихідна напруга схеми, - вхідна напруга, $T = RC$ та $K = 1.$ Крім того, ті ж рівняння (1.3), (1.4) описують процес розгону електродвигуна, рис. 1.9, в, для якого $x_1(t) = \omega(t)$ - вхідна напруга.

З поняттям кібернетичного блоку пов'язані такі задачі: *ідентифікація* – знаходження аналітичного виразу (1.1), який пов'язує сигнали $x_2(t), x_1(t)$; *управління* – визначення вхідного сигналу $x_2(t)$, який забезпечує отримання заданого вихідного сигналу $x_1(t)$ з припущенням, що опис блоку заданий.

1.4. Кібернетичні системи

Кібернетична система – це впорядкована сукупність (система) кібернетичних блоків, які пов'язані між собою інформаційними каналами. Поняття системи передбачає появу нової якості, відмінної від властивостей її окремих елементів. Зв'язки, згадані у означенні, мають сигнальний, інформаційний характер.

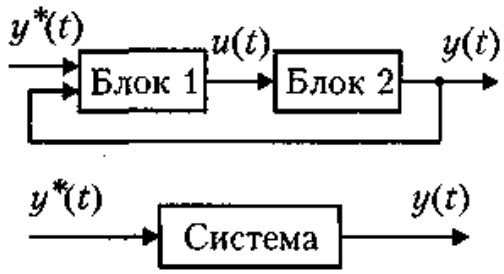


Рис. 1.10. Спрощене зображення кібернетичної системи

Для опису системи слід отримати аналітичні залежності, які описують кожний з блоків (Блок 1, Блок 2 та ін..) зокрема та зв'язки між ними. Після еквівалентних перетворень можна отримати загальний (еквівалентний) опис системи як складовий кібернетичного блоку з вхідним сигналом $y^*(t)$ та вихідним сигналом $y(t).$ Тобто кібернетична система є складним блоком. У залежності від чисельності вхідних та вихідних сигналів розрізняють *одно канальні* системи (з одним входом та одним виходом) та *багатоканальні*

системи з кількома вхідними та вихідними сигналами. Системи, у яких відсутні вхідні сигнали, називаються *автономними*. За типом сигналів чи блоків у системі розрізняють неперервні, дискретні та дискретно-неперервні системи, причому останні містять неперервні та дискретні блоки.

Згідно з означенням кібернетичної системи постають такі задачі:
аналіз системи, тобто виявлення зв'язку між її входом та виходом (наприклад, у вигляді алгебраїчного чи диференціального рівняння), а також знаходження непрямих показників якості системи (швидкодії, точності та ін.);
управління, чи *синтез* системи, тобто виявлення блоків та зв'язків між ними, які забезпечують отримання заданого зв'язку вхідних та вихідних сигналів чи заданих показників якості.

Відомою також є задача *проектування*, яка включає у себе задачу управління (синтез системи), її комплектування (вибору фізичних елементів), розробки прикладних програм, які керують ЕОМ, та ін. Найпоширенішим типом дискретно-неперервних систем є *цифрові системи*, до складу яких входять цифрові обчислювальні пристрої – ЕОМ та цифрові контролери.

1.5. Дискретно-неперервні (цифрові) системи

Розглянемо цифрову систему управління обертанням кінематичного механізму. До складу системи входять найпростіший кінематичний механізм (КМ), електродвигун (ЕД), підсилювач потужності (ПП), цифро аналоговий перетворювач (ЦАП) та керуюча обчислювальна машина ЕОМ, рис. 1.11.

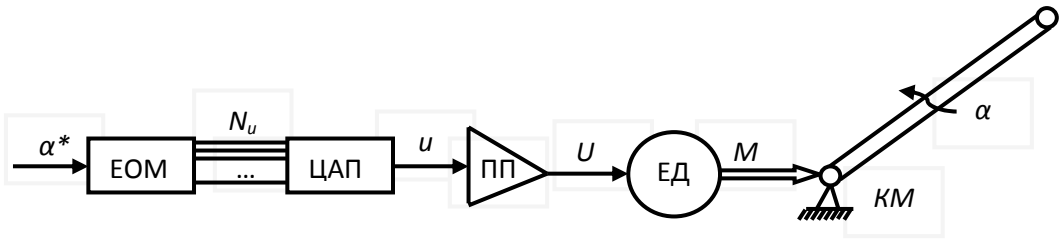


Рис. 1.11. Система управління обертанням кінематичного механізму

Робота системи відбувається так. Інформація про потрібний кут обертання КМ α^* (задавання) надходить до ЕОМ, де здійснюється розрахунок необхідного керуючого сигналу. Останній зображений як цифровий код $N_u(t)$, який перетворюється у аналоговий керуючий сигнал $u(t)$ з використанням цифро-аналогового перетворювача. Оскільки потужності отриманого сигналу $u(t)$ недостатньо для приведення у дію електродвигуна, то необхідним є підключення підсилювача потужності. Вихідна напруга підсилювача $U(t)$, будучи прикладеним до двигуна, призводить до створення необхідного рушійного моменту (сигнал $M(t)$). Момент електродвигуна прикладається до валу кінематичного механізму та забезпечує його

обертання, тобто забезпечує його обертання, тобто зміну кутового положення $\propto(t)$ від початкової величини $\propto(0)$ до заданого значення $\propto^*(t)$. Сигнали у цій системі різні за фізичною природою та засобами кодування. Внаслідок дискретності процесів у цифрових обчислювальних пристроях та скінченності їх розрядної сітки ЕОМ є дискретним блоком, а сигнал на її виході $N_u(t)$ - квантований за часом та рівнем. Система, наведена на рис. 1.11, відноситься до класу *розімкнених систем управління*, у яких задача управління, зміна стану КМ, розв'язується без врахування реального положення механізму $\propto(t)$. Це викликає певні складності розрахунку керуючого сигналу $u(t)$, який забезпечує задане кутове переміщення $\propto^*(t)$, та не гарантує достатню точність управління за умови дії на механізм сил тяжіння та тертя. Ці недоліки усуваються у замкнених системах, до складу яких входять підсистема контролю та зворотні зв'язки.

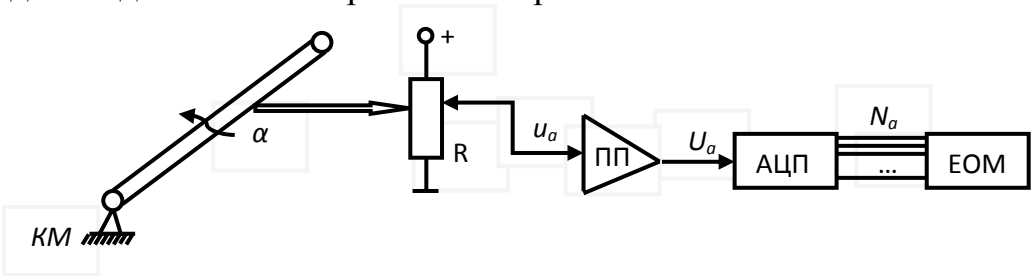


Рис. 1.12. Підсистема контролю

Доповнимо розглянуту раніше систему такими елементами, рис. 1.12,: вимірювальним потенціометром *R*, вихідна напруга якого $u_\propto(t)$ пропорційна поточному значенню $\propto(t)$, підсилювачем П та аналогово-цифровим перетворювачем АЦП, який здійснює перетворення сигналу $U_\propto(t)$ на виході підсилювача у цифровий код $N_\propto(t)$, який надходить далі до ЕОМ. Ці елементи у сукупності з ЕОМ складають цифрову підсистему контролю обертання кінематичного механізму, яка забезпечує вимір поточного положення точки КМ та введення інформації до керуючої обчислювальної машини. Сигнал цифрового коду $N_\propto(t)$ є дискретним, що обумовлено функціональними особливостями АЦП, тобто наяву дискретно-неперервний тип розглянутої підсистеми контролю. Об'єднання розімкненої системи управління та підсистеми контролю дає змогу отримувати замкнену систему управління. Укрупнена схема такої системи подана на рис. 1.13. Вона включає до свого складу цифровий блок управління та електромеханічний блок (ЕМ блок). Останній об'єднує аналогові елементи системи (кінематичний механізм, двигун, підсилювачі та вимірювальний потенціометр) і за типом сигналів відноситься до неперервних блоків. До блоку управління входять ЕОМ та пристрої введення-виведення інформації (УВВ), чи спряження з об'єктом, які представлені цифро-аналоговими та аналого-цифровими перетворювачами, які забезпечують спряження цифрової та аналогової частин системи управління.

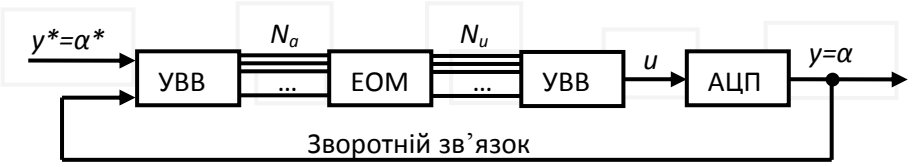


Рис. 1.13. Замкнена система управління

До функцій цифрового блоку управління входить розрахунок керуючого сигналу $u(t)$ на основі задавання α^* та поточної інформації про положення кінематичного механізму $\alpha(t)$. Найпростіший алгоритм (пропорційний алгоритм управління) має вигляд

$$u(t) = k(\alpha^* - \alpha(t)), \qquad (1.5)$$

де k - постійний коефіцієнт. При розрахунках за формулою (1.5) керуючий сигнал пропорційний поточному значенню відхилення $\alpha^* - \alpha(t)$, що забезпечує: рух кінематичного механізму у потрібному напрямку в залежності від знаку відхилення за умови $\alpha(t) \neq \alpha^*$; зупинку механізму за умови $\alpha^* = \alpha(t)$ в силу отримання $u(t) = 0$ та нульових значень напруги на виході підсилювача потужності *U*, а також моменту обертання *M*. Укрупнений алгоритм роботи ЕОМ у режимі реального часу представлений на рис. 1.14. Він включає блок введення даних (задавання $y^* = \alpha^*$ та поточного значення $y = \alpha$), блок розрахунку поточного значення управління u за формулою (1.5) та блок введення даних (отриманого значення u). Циклічне виконання алгоритму забезпечує у процесі роботи системи оновлення вихідних даних $u(t)$ за умови зміни вхідних даних – поточного значення $y(t) = \alpha(t)$.

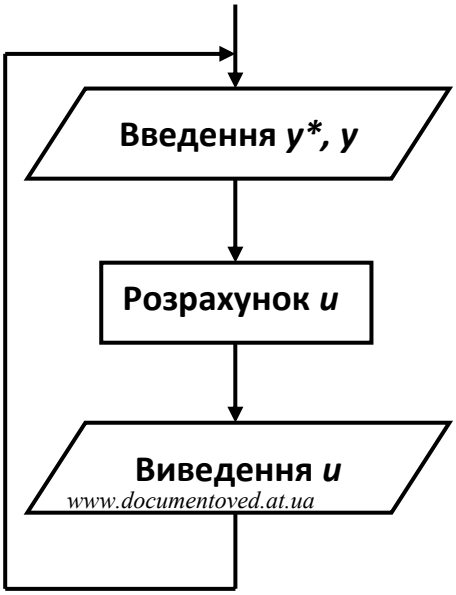


Рис. 1.14. Алгоритм роботи ЕОМ

Циклічний характер виконання програми є причиною дискретності сигналів N_{α}, N_{u} та цифрового пристрою управління у цілому. За цих умов інтервал квантування *T* наближено оцінюється часом, необхідним для виконання одного циклу програми. Розглянута система управління є складеним кібернетичним блоком з вхідним сигналом $y^{*} = \alpha^{*}$ та вхідним сигналом $y = \alpha(t)$. Система містить зворотний зв'язок за вихідною змінною, сигнал y надходить «назад» на вхід системи. Її аналітичний опис, зв'язок y^{*} та y можна отримати на основі відомих прийомів перетворення динамічних систем, використовуючи опис електромеханічного блоку, зв'язок сигналів y та u , та формулу (1.5).

1.6. Кібернетика та предмет теорії автоматичного управління

Поняття кібернетики як науки про управління та зв'язку у живому – природі та суспільстві, та машинах введено Норбертом Вінером у 1948 р. Нині, як окремі дисципліни, розглядаються такі розділи кібернетики: системний аналіз - теорія великих систем, теорія складних систем та ін. ; теорія автоматичного управління (ТАУ); прикладна теорія інформації; теорія оцінювання – ідентифікації; теорія обчислювальних машин; робототехніка та ін. В залежності від області застосування розрізняють: технічну кібернетику (тобто кібернетику у технічних додатках), біокібернетику, медичну кібернетику, економічну кібернетику та ін.

Теорія автоматичного управління (ТАУ) – це наука про управління, яка вивчає задачі аналізу та синтезу систем автоматичного управління (САУ), як одного з класів кібернетичних систем. Основними задачами ТАУ є: *аналіз САУ*, тобто аналіз стійкості, структурних властивостей, динамічних показників якості, точності; *синтез САУ* , тобто синтез алгоритмів (аналітичних виразів), які описують блоки системи та їх зв'язки та забезпечують задану, можливо оптимальну, якість управління.

Сучасна теорія управління займає провідне місце у технічних науках і відноситься до однієї з галузей прикладної математики, а теорія і практика автоматичного управління пов'язані з обчислювальною технікою. Дослідження САУ включає такі етапи: *моделювання* з використанням комп'ютерів та універсальних, математичних або спеціалізованих, предметно-орієнтованих, прикладних програм; *синтез САУ* з залученням сучасного математичного апарату (апарату лінійної алгебри, чисельних методів, методів оптимізації) та машинних методів розрахунку;

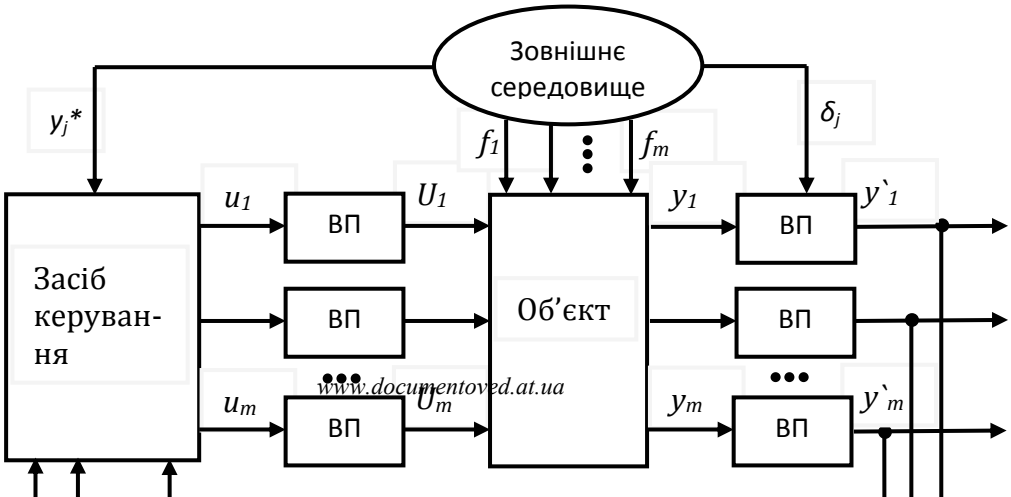
проектування САУ з використанням апаратних засобів обчислювальної техніки та їх програмного забезпечення – операційних систем реального часу, засобів автоматизації програмування та ін.

Перші проекти з практичної реалізації цифрових систем були висунуті усередині XX ст. і були спрямовані на розв'язання задач автоматизації складних хімічних процесів, космічних досліджень та ін. Робота над проектами засвідчила, що для успішного здійснення цифрового управління необхідні: ґрунтовний аналіз керованих процесів, спрямований на побудову адекватних математичних моделей; достатньо досконалі алгоритми управління. Це визначило інтенсивний розвиток у 60-і роки XX ст. математичних методів управління, орієнтованих на використання ЕОМ та становлення ***сучасної теорії управління***. Практична реалізація нових методів наштовхнулася на ряд перешкод, серед яких – низька швидкодія існуючих засобів обчислювальної техніки, їх значні габарити, вартість та низька надійність. Розв'язок проблеми був запропонований усередині 70-х років XX ст. з появою серійних, достатньо дешевих мікропроцесорів та мікро-ЕОМ, які забезпечували потрібну швидкодію процесів управління, мали малі габарити та високу надійність. З 80-х років XX ст. мікропроцесорні пристрої та цифрові мікроконтролери поступово витіснили традиційно електричні та електронні засоби управління. З розвитком мікропроцесорної техніки з'явилася можливість реалізації складніших алгоритмів для розв'язку нетрадиційних задач управління. Проектування, впровадження та експлуатація сучасних САУ передбачає тісну взаємодію фахівців різного профілю, таких, як: технологів – фахівців з особливостей фізичного характеру щодо особливостей керованих процесів та технічних вимог до проектованих САУ; фахівців з автоматичного управління, які забезпечують розробку САУ, тобто алгоритмів управління та контролю; фахівців з обчислювальної техніки для розробки математичного забезпечення для проектування САУ, засобів автоматизації програмування, організації обчислень у реальному масштабі часу та комплектування технічних засобів.

1.7. Структура та функціональні компоненти САУ

1.7.1. Функціональні компоненти систем управління

Система автоматичного управління містить такі компоненти, що забезпечують її функціонування, рис. 1.15,: об'єкт, або керований процес; виконавчі пристрої (ВП); вимірювальні пристрої (ВП); пристрої управління.



www.documentoved.at.ua

Рис. 1.15. Функціональна схема САУ

Об’єктами технічних систем є кінематичні механізми, електричні системи, теплові, хімічні та інші технологічні процеси. Поточний стан об’єкта характеризується змінними стану $x_i = x_i(t)$, до яких відносяться такі фізичні величини: кутові та лінійні координати, швидкості та інші механічні змінні, які описують рухи кінематичних механізмів; струми чи напруги електричних елементів схеми; температури та густини речовин у теплових та хімічних процесах. Змінні стану об’єднуються у вектор стану

$$x = \{x_i\} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot x_n]^T.$$

До регульованих, чи вихідних, змінних $y_j = y_j(t)$ відносяться ті змінні об’єкту чи керованого процесу, по відношенню до яких формулюється основна задача управління. Вихідні змінні об’єднуються у вектор виходу

$$y = \{y_j\} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot y_m]^T.$$

До багато ланцюгових кінематичних механізмів вектор виходу, як правило, зображений декартовими координатами робочої точки механізму, наприклад, схоплення робота-маніпулятора.

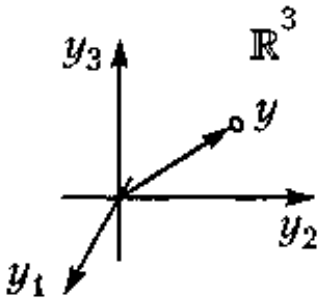


Рис. 1.16. Схема декартових координат робочої точки механізму

Входами об'єкту є керуючі органи, до яких прикладаються дії U_j виконавчих пристроїв системи. Це – вхідні осі кінематичних механізмів, рис. 1.16, вхідні схеми електричних систем, нагрівальні елементи та вентилі теплових та хімічних процесів, до яких прикладені сили чи моменти сил електроприводів, електричні напруги, та ін., які викликають рух (розвиток) керованого процесу. Об'єкти з одним входом та одним виходом (m=1) називаються одно канальними. До багатоканальних об'єктів, рис. 1.17, відносять об'єкти з кількома входами та/або виходами. Останні можуть мати автономні, незалежні один від іншого, канали. Часто канали багатоканального об'єкта виявляються взаємопов'язаними, такий об'єкт називається многозв'язним.

До зовнішнього середовища системи управління відносяться зовнішні процеси, які впливають на поведінку керованого об'єкту. Середовище є джерелом таких факторів-дій: завад вимірів $\delta_j(t)$, збурень $f_j(t)$; зовнішніх задаючих дій $y_j^*(t)$. До збурень відносять дії, які перешкоджають функціонуванню об'єкта. Це – сили опору для кінематичних механізмів, температура навколишнього середовища для теплових процесів та ін. Збурення об'єднуються у вектор збурень

$$f = \{f_j\} = [f_1 \quad f_2 \quad . \; . \quad . \quad f_l]^T$$

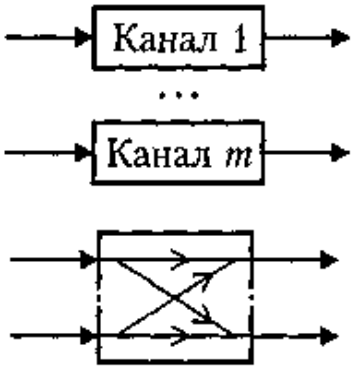


Рис. 1.17. Схема одно - та багатоканального об'єкта

Вимірювальні пристрої (давачі) призначені для отримання інформації про об'єкт та зовнішнє середовище – сигналів $y_j^{'}$, тобто для електричного вимірювання вихідних змінних, а також змінних стану та зовнішніх збурень, які задають. У цьому відношенні розглядають такі типи вимірювальних пристроїв: давачі внутрішньої інформації, призначені для виміру змінних об'єкту, або системи управління; давачі зовнішньої інформації – сенсори, засоби з реалізації відчуттів, засоби зовнішнього контролю, вимірювачі стану зовнішнього середовища чи положення об'єкта по відносно до зовнішніх

об'єктів. До складу вимірювальних пристроїв часто включають також обчислювальні блоки, які здійснюють первинну обробку інформації.

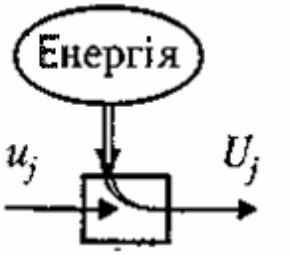


Рис. 1.18. Наближена схема виконавчого механізму

Виконавчіі пристрої – це пристрої, призначені для підсилення малопотужних керуючих сигналів u_j, та створення енергетичних дій U_j на входах об'єкту, тобто керовані джерела механічної, електричної чи теплової енергії. Найпоширеніший тип електромеханічного виконавчого пристрою – електропривід, чи керований перетворювач електричної енергії у механічну.

Пристрій управління – це обчислювальний блок, який обробляє отриману з використанням вимірювачів поточну інформацію про стан об'єкта та зовнішнього середовища та формує керуючі дії u_j, тобто малопотужні інформаційні сигнали, які надходять на виконавчі пристрої об'єкта. Керуючі дії об'єднуються у вектор управління

$$u = \{u_j\} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]^T.$$

До функцій пристрою управління входять: ідентифікація об'єкту та середовища (аналіз їх поточного стану та, можливо, параметрів); генерування внутрішніх задаючих дій; розрахунок керуючих дій u_j за вказаними формулами (алгоритмами управління).

1.7.2. Управління положенням кінематичного механізму. Укрупнена схема системи управління

Розглянемо найпростіші системи управління механічними об'єктами.

Приклад 1. На рис. 1.19 зображена функціональна схема одно канальної системи управління поступальним рухом ланки робота-маніпулятора (РМ). Позначення: $y(t)$ - поточне положення ланки РМ, y^* - задане положення, y' - виміряне положення, $u(t)$ - керуючий сигнал.

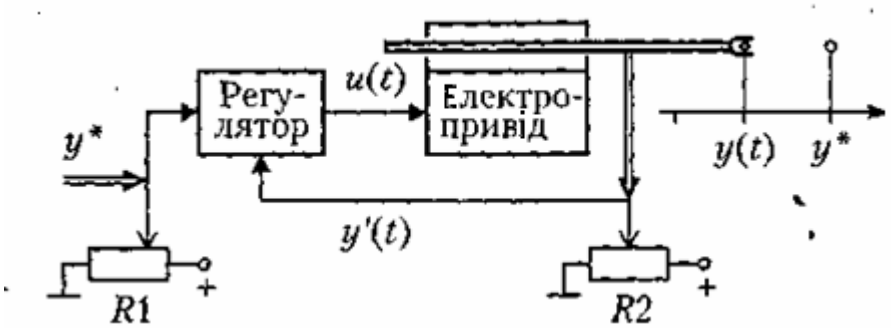


Рис. 1.19. Система управління ланкою робота-маніпулятора

Потрібне положення ланки вводиться до системи з використанням блоку задавання потенціометра R_1, який є найпростішим блоком задавання. Вимірювальний потенціометр R_2 виконує функцію давача положення (вимірювального пристрою). Виконавчим пристроєм є електропривід, який складається з підсилювача потужності ПП, електродвигуна ЕД та механічної передачі (редуктора кулько гвинтової передачі, та ін.), яка пов'язує ЕД з керованою ланкою маніпулятора. Схема електроприводу наведена на рис. 1.20, де U - напруга на виході електродвигуна, α - кут повороту вала ЕД.

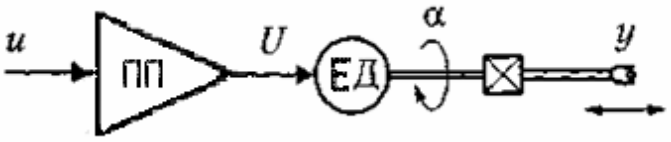


Рис. 1.20. Електропривід

Важливим елементом є регулятор, який реалізується на основі аналогових елементів (підсилювачів, суматорів, інтеграторів та ін.) чи цифрових схем (ЕОМ). Регулятор розраховує значення керуючого сигналу $u(t)$ на основі інформації про задане y^* та реальне $y(t)$, точніше, виміряне $y'(t)$ положення ланки. Найпростіший тип регулятора – пропорційний, чи П – регулятор, здійснює розрахунки за алгоритмом, який визначається формулою

$$u(t) = k\varepsilon(t), \tag{1.6}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, ε - похибка (відхилення чи розузгодження), яка визначається за формулою, рис. 1.21,

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t). \tag{1.7}$$

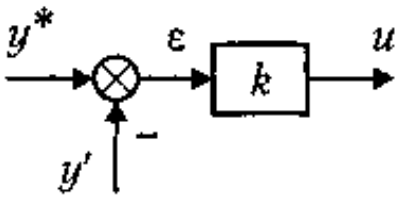


Рис. 1.21. До ілюстрації похибки

Ця система управління призначена для розв'язку термінальної задачі – задачі переміщення ланки РМ до заданого кінцевого (термінального) положення y^*: $y \to y^*$, чи усунення похибки положення ε. Структурна схема системи управління положенням, а також часові діаграми, зображені на рис. 1.22 – 1.23. Система містить блок управління, який складається із блоку задавання (ЗБ) та регулятора, а також виконавчий вимірювальний пристрій. Роботу

системи можна охарактеризувати трьома етапами, рис. 1.23,: початковий етап від моменту часу t_0 до моменту t_1; перехідний режим роботи від t_1 до t_2; усталений режим, коли $t > t_2$.

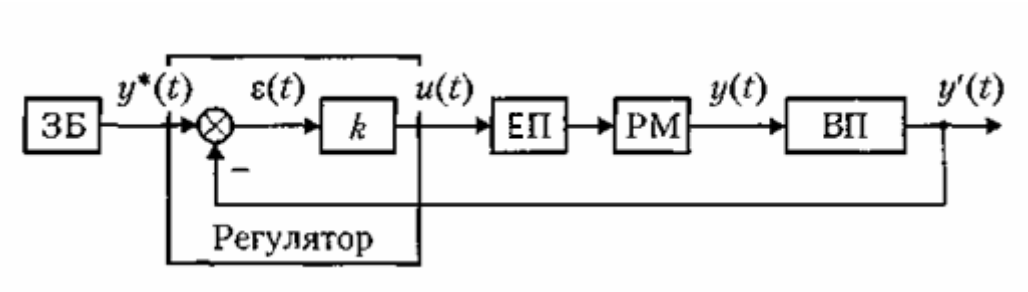


Рис. 1.22. Структурна схема управління положенням

На початку роботи системи вважається, що ланка РМ знаходиться у нульовому положенні: $y = 0$, за цих умов повзуни потенціометрів: який задає – R_1, та вимірює – R_2, також займають нульові положення: $y^* = y' = 0$. Формули (1.6) – (1.7) свідчать, що на цьому етапі роботи похибка ε відсутня, керуючий сигнал приймає нульове значення: $u = 0$, тому електропривід знаходиться у стані спокою.

Рис. 1.23. Процеси у системі управління положенням кінематичного механізму (КМ)

У перехідному режимі здійснюється відпрацьовування дії задавання: у момент t_1 рукоятка переводиться у положення y^*, що призводить до появи сигналу похибки та пропорційного її сигналу управління u. Останній підсилюється, приводить у дію електродвигун та ланку РМ. Значення похибки та керуючого сигналу зменшується у міру наближення ланки до заданого положення y^*. У момент t_2, коли вимірювальний потенціометр R_2 займає положення $y^* = y'$, сигнал похибки знову приймає нульове значення

$\varepsilon = 0$, і система зупиняється. В усталеному режимі, коли $t > t_2$, система забезпечує стабілізацію ланки у положенні $y^* = y'$. Реальна поведінка системи відрізнятиметься від розглянутої вище ідеальної. У силу інерційних властивостей ЕП та об'єкту (ланки РМ) можливим є отримання коливального перехідного процесу та пере регулювання системи, коли у процесі руху об'єкт спочатку проходить далі заданого положення $y^* = y'$, а потім повертається назад. Числові значення показників коливання та пере регулювання характеризують динамічні властивості системи і відносяться до динамічних показників її якості. У реальних системах не забезпечується абсолютна точність розв'язку задачі управління – після закінчення перехідного процесу, в усталеному режимі, положення РМ відрізнятиметься від задавання y^* на величину усталеної похибки ε_y, яка характеризує точність роботи системи. Динамічні показники та показники точності можна істотно покращити з використанням більш досконалих алгоритмів управління. Для забезпечення більш плавного переміщення механізму до заданої точки часто застосовується режим слідкування, у якому використовується змінна дія задавання $y^*(t)$. Задача системи управління (слідкуючої системи) полягає у такому переміщенні ланки, коли її поточне положення відслідковує заданий закон, тобто $y = y^*(t)$. Режим слідкування потребує залучення складнішого блоку задавання – програмно чи апаратно реалізованого генератора дії задавання. Для вимірювання механічних змінних окрім найпростіших давачів переміщення можуть використовуватися інші, складніші вимірювальні пристрої та сенсорні системи – тахогенератори, оптичні давачі переміщень, далекоміри та системи технічного зору.

Приклад. Розглянемо систему управління маніпуляцій ним роботом з багатьма ланками, рис. 1.24.

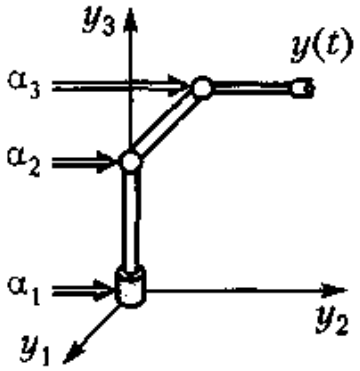


Рис. 1.24. Маніпулятор з багатьма ланками

Система містить декілька виконавчих механізмів (електроприводів), які здійснюють повороти ланок робота на кути $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Як ЗБ використовуються різні задаючі генератори, а до складу вимірювальних пристроїв входять сенсори та засоби обчислювальної техніки, призначені для первинної обробки отриманої інформації. На рис. 1.25 наведено схему системи управління рухом руки – природний аналог технічної системи управління положенням маніпулятора.

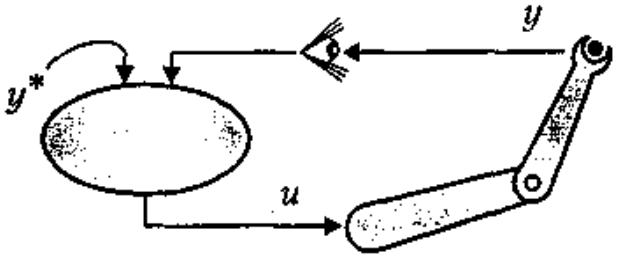


Рис. 1.25.Система управління рухом руки

Систему управління можна зобразити як два основних блоки, які взаємодіють із зовнішнім середовищем, рис. 1.26.

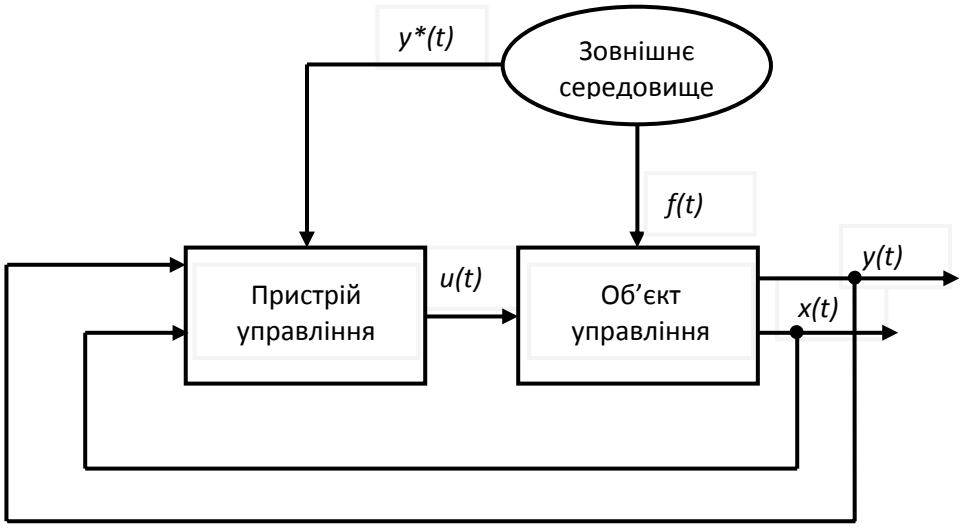


Рис. 1.26. Укрупнена схема системи автоматичного управління (САУ)

Об'єкт управління (ОУ) – це комплекс елементів системи, пов'язана з фізичною природою керованого процесу, який включає до свого складу сам об'єкт, вимірювальні та виконавчі пристрої. Ця частина САУ проектується і комплектується як єдине ціле і є найбільш жорсткою і незмінною частиною. Динамічні властивості ОУ, його математична модель, визначаються на основі використання універсальних законів фізики, наприклад, законів збереження матерії, енергії та ін. Пристрій управління (ПУ) – це блок, який виконує обчислювальні функції, слабко пов'язані з фізичною природою ОУ. Алгоритм роботи ОУ визначається динамічними властивостями керованого процесу у вигляді математичної моделі ОУ, та задачами, які вирішуються з використанням системи управління. Апаратно сучасні ПУ є універсальними чи спеціалізованими засобами обчислювальної техніки. Їх програмне забезпечення складають універсальні системні засоби та спеціальні прикладні програми, які здійснюють розрахунок управлінських дій $u(t)$. Пристрої легко пристосовуються до конкретного ОУ та до задачі управління, внаслідок їх гнучкості та універсальності.

1.8. Задачі управління складними системами. Локальні задачі управління

Складною системою називається така система, яка включає до свого складу велику чисельність елементів та підсистем, які взаємодіють і забезпечують розв'язок складної, комплексної, задачі. До таких систем відносять інформаційні та транспортні мережі, виробничі процеси, системи управління складними динамічними об'єктами. Складні системи мають такі ознаки: комплексний, складовий, характер керованого процесу чи об'єкту, що передбачає наявність кількох взаємопов'язаних більш простих (локальних, елементарних) об'єктів О1, О2,…; необхідність послідовного розв'язування задачі управління, тобто почережного виконання основних дій, режимів роботи Р1, Р2,… системи чи локальних об'єктів; ієрархічна структура задачі управління, тобто підпорядкованість під задач, які складають складну задачу. Виділяють стратегічну задачу з різним рівнем ієрархії, і тактичні та локальні задачі управління, рис. 1.27.

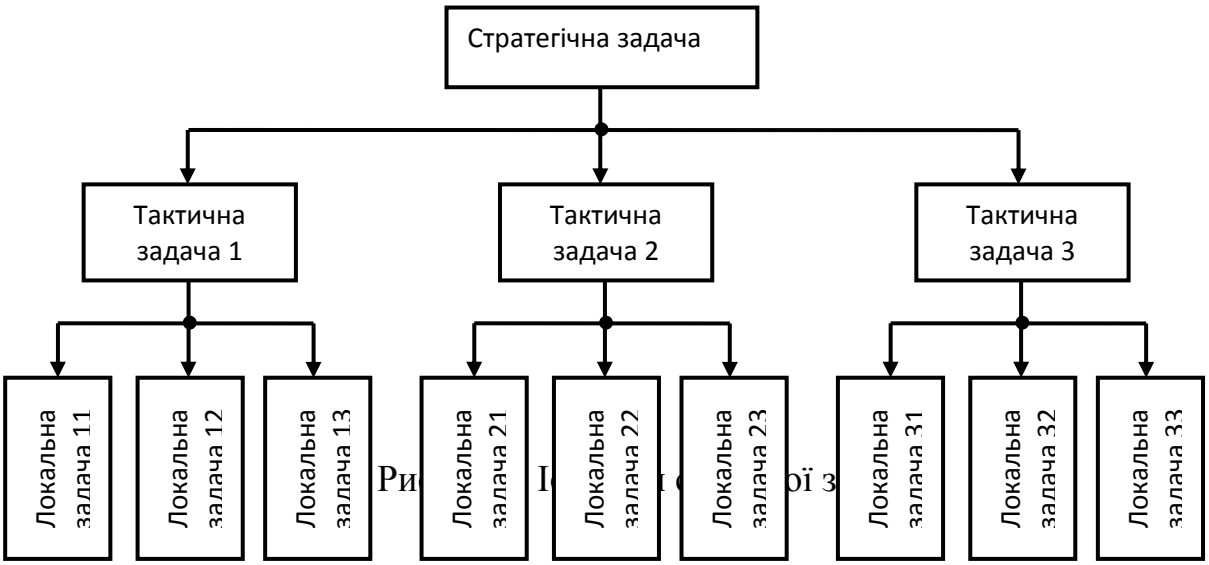


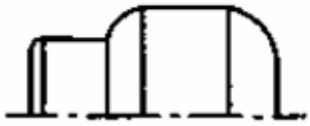
Рис. 1.27. Ієрархічна структура складної задачі

Основним у поняттях складної задачі та складної системи є їх структурованість, тобто можливість розбиття на компоненти з меншою складністю. Вибір таких компонентів неоднозначний, а термінологія, що використовується за цих умов, умовна. До стратегічних задач управління відносяться задачі технологічного характеру, такі, як виготовлення хімічного продукту деталі, управління польотом та ін., тобто задачі підтримання певної послідовності дій складного об'єкта, внаслідок чого розв'язується певна технологічна задача. Технічна задача – це елемент загальної стратегічної задачі, який встановлює вимоги до поведінки кожного елементарного об'єкту складної системи та/або реалізації елементарного режиму. До тактичних задач управління відноситься задача управління рухом рульових пристроїв літального апарату, управління обробкою деталі на станку, управління циклом хімічного процесу.

Приклад.

Тактична задача управління обробкою деталі на станку оформляється у вигляді технологічної програми. Остання складається з кадрів, кожний з яких містить закодовану інформацію про тип виконуваної операції та її параметри

(швидкість руху, координати вузлових точок, тип та параметри траєкторій руху та ін.), тобто є завданням на виконання локальних задач управління.



№	Операція	Параметри
1		
2		

Рис. 1.28. Оформлення технічної задачі управління обробкою деталі на станку

Локальна задача – це задача зміни чи підтримки стану елементарного об’єкта. До локальних відносяться, наприклад, задачі стабілізації положення чи швидкості, задачі слідкування за зовнішнім об’єктом чи сигналом задавання $y^*(t)$. Тобто поняття складної задачі передбачає можливість розчленування загальної стратегічної задачі на ряд простіших задач, які розв’язуються послідовно чи паралельно. Тобто мова йде про такі принципи управління складною системою: декомпозиція – тобто розщеплення складної задачі та складного об’єкта на простіші компоненти, під задачі та локальні об’єкти О1, О2, та ін. , рис.1.29; децентралізація – виділення власних пристроїв управління ПУ1, ПУ2 та ін. , або програмних засобів, алгоритмів, які забезпечують розв’язок окремих під задач та управління локальними об’єктами; ієрархічне управління – введення певної підпорядкованості під задач різного рівня складності та відповідної підпорядкованості пристроїв управління; багато режимне управління, або часова декомпозиція, - послідовне переключення розв’язуваних задач та пристроїв управління.

Багаторежимне управління може здійснюватися: за командами оператора; за завчасно встановленою жорсткою програмою; методами самоорганізації, що передбачає автоматичний вибір режимів з врахуванням ситуації, що виникла, використання процедур самонавчання та нечітко-логічних схем управління.

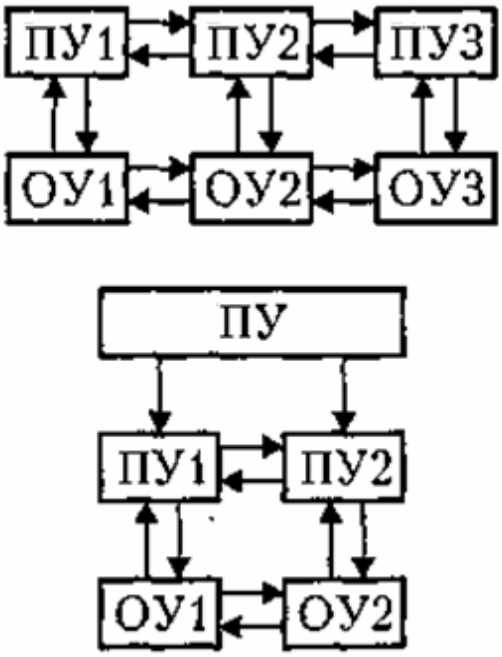


Рис.1.29. Ілюстративна схема принципу управління складною системою

Приклад (транспортна система). Система призначена для організації автоматичного транспортування предметів, деталей, виробів та інструментів на технологічній ланці, виробництві (виробничому, торгівельному та ін.) ланці, рис. 1.30.

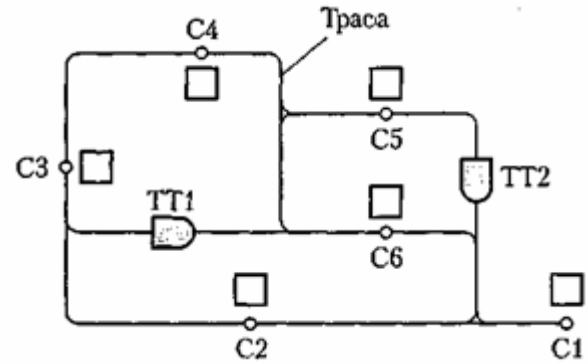


Рис. 1.30. Транспортна система

На рис. 1.30 ТТ1-ТТ2 – транспортні візки (роботи), С1-С6 – робочі станції. Стратегічною задаею такої системи є транспортне забезпечення технологічного процесу – транспортування предметів між робочими станціями у відповідності з поточними потребами ланки. Задача розбивається на послідовно та паралельно розв’язувані тактичні задачі – транспортування вантажу одним візком $ТТ_i$ від станції $С_i$ до станції $С_j$. Локальні задачі, які виникають у процесі руху візка – це задачі типу: підтримання заданої

швидкості ТТ; стабілізація заданої траєкторії; позиціонування (точної зупинки) у заданих точках.

Локальні задачі управління встановлюють бажаний характер зміни змінних об'єкту. УВ залежності від структури об'єкту розрізняють задачі одно канального та багатоканального управління, рис. 1.31.

Рис. 1.31. Задачі управління

1.8.1. Одноканальне управління та якість системи. Багатоканальне управління

У задачах одно канального управління, до яких відносяться задачі стабілізації, слідкування та термінального управління, вихідна змінна $y(t)$ є скалярною функцією часу. Задача стабілізації, або регулювання, формулюється як задача підтримання вихідної змінної на заданому рівні $y^* = const,$ тобто можна записати $y = y^* = const.$ Задача слідкування – це задача дотримання заданого закону $y^*(t)$ зміни змінної y , тобто $y = y^*(t)$. Розрізняють: задачі слідкування за зовнішнім об'єктом – об'єктом слідкування ОС, коли функція $y^*(t)$ є виходом ОС і завчасно невідома; задачі програмного управління, у яких програма руху $y^*(t)$ генерується спеціальним блоком задавання ЗБ, який входить до складу пристрою управління САУ. Система автоматичного управління, яка розв'язує задачу слідкування називається слідкуючою системою. Сигнал $y^*(t),$ який визначає потрібний закон руху системи, називається жадаючою дією. Сигнал $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$, який характеризує поточне значення відхилення змінної від жадаючої дії, називається розузгодженням, похибкою, чи відхиленням.

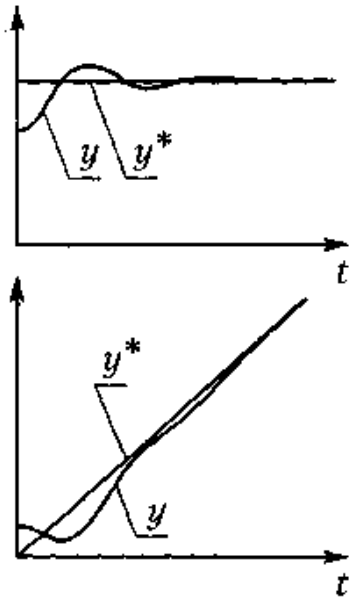


Рис. 1.32. Зображення параметрів одно канального управління

За цих умов значення $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = y^*(0) - y(0)$ початкове розузгодженням системи. Тоді задачі стабілізації та слідкування можна сформулювати інакше, як задачі підтримання нульового значення розузгодженням, тобто $\varepsilon(t) = 0$.

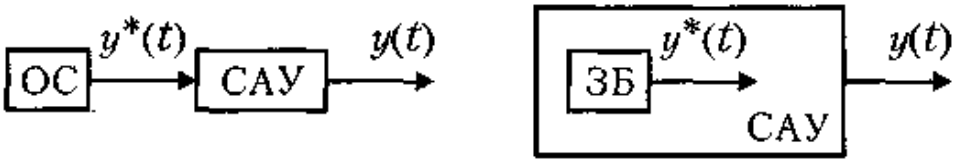


Рис. 1.33. Слідкуючі системи

Задача термінального управління полягає у «переміщенні» об'єкту управління до заданої, як правило віддаленої, скінченної термінальної точки y_f: $y \to y_f$. Основна особливість термінальної задачі, яка відрізняє її від задачі стабілізації, полягає у тому, що величина відхилення $\varepsilon_0 = y_f - y_0$ є достатньо великою Це обумовлює необхідність вибору особливої стратегії управління – мінімізація швидкодії чи енергетичних витрат, дотримання обмежень на керуючі сигнали та змінні стану, та ін. Повне усунення ε

розузгодження у реальних системах, рис. 1.34, не досягається, причиною

чого є ненульові початкові значення ε_0, швидка зміна дій задавання $y^*(t)$, а також вплив збурюючих дій $f(t)$. Для оцінки ефективності розв'язку задач

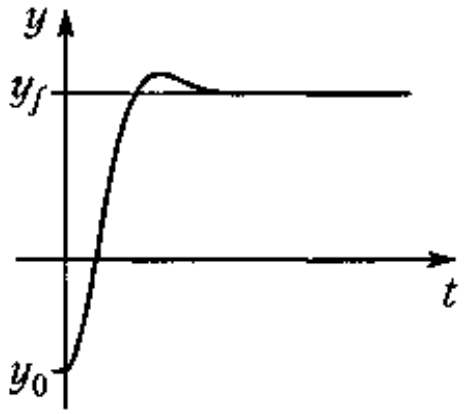


Рис. 1.34. До задачі термінального управління

управління вводяться показники якості управління. Розрізняють динамічні показники, які визначають якість перехідного режиму роботи системи, до яких відносяться різноманітні якісні, числові, оцінки швидкодії та коливальні системи, та показники точності, які визначають погрішність системи в усталеному режимі, тобто по закінченню перехідного процесу. До динамічних показників відносяться тривалість перехідного процесу $t_п$ та перерегулювання (відносна величина першого викиду похибки А), а до точнісних – похибка стабілізації чи слідкування, яка пов'язана з усталеною похибкою ε_v.

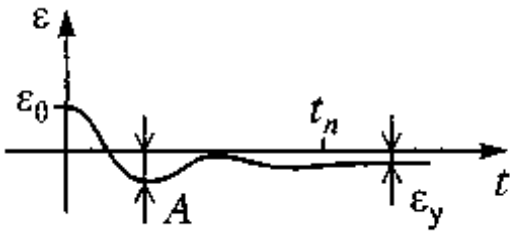


Рис. 1.35. До усунення розузгодження

У багатоканальних задачах управління виходом об'єкта є векторна змінна – вектор виходу $y = y(t) = \{y_j(t)\}$, тобто векторними змінними є також дія задавання (вектор задавання) $y^* = y^*(t) = \{y_j^*(t)\}$ та розузгодження

(вектор похибок) $\varepsilon = \varepsilon(t) = \varepsilon_j(t).$ Формулювання основних задач багатоканального управління (стабілізації, слідкування, термінального управління) практично не відрізняються від наведених вище. Окрім них для багатоканальних об'єктів виникає ряд специфічних задач, серед яких виділяються задачі декомпозиції та узгодженого управління.

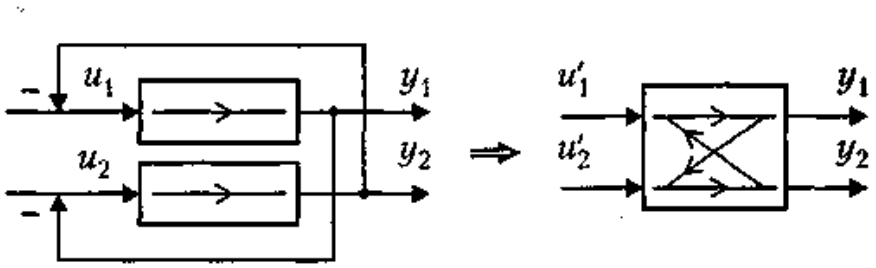


Рис. 1.36.

Задачі узгодженого управління передбачають організацію примусової взаємодії каналів системи з метою підтримання заданих співвідношень вихідних змінних $y_j(t).$ Такі співвідношення, чи умови узгодження, у найпростіших випадках приймають вигляд рівностей типу $y_1 = y_2,$ які відповідають синхронному рухові окремих частин (каналів) складної системи. У більш загальному випадку умови узгодженості можна записати у вигляді:

$$\varphi(y_1, y_2) = 0, \qquad (1.8)$$

де $\varphi(\cdot)$ задана функція. Розв'язок задачі узгодженого управління потребує введення штучних перехресних зв'язків, рис. 1.36, тобто координації керуючих дій u_j.

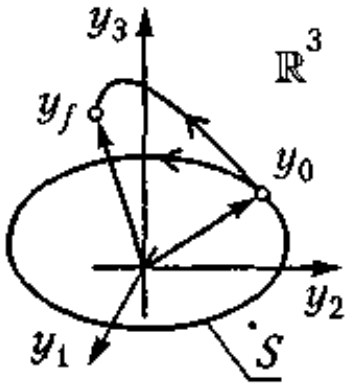


Рис. 1.37. До ілюстрації задачі термінального та узгодженого управління

Найбільш наочні задачі термінального та узгодженого управління виникають у разі управління просторовим рухом механічних об’єктів з багатьма ланками (роботів, станків, маятникових систем, транспортних засобів). У цьому випадку як вихідні змінні системи є декартові координати y_j робочої точки механізму у двовимірному $\mathbf{R}^2$ чи тривимірному $\mathbf{R}^3$ фізичному просторі, рис. 1.37, а задача переміщення робочої точки механізму з початкового положення $y_0 = \{y_{0j}\}$ у точку $y_f = \{y_{fi}\}$ відноситься до багатоканальних термінальних задач. При організації синхронного руху кількох однотипних механізмів виникає найпростіша задача узгодженого управління. Якщо складна механічна система повинна здійснювати рух за певною траєкторією S, то ставиться задача узгодження вихідних змінних, у якій умова узгодження (1.8) є рівнянням кривої S у фізичному (декартовому) просторі.

Приклад. Контурний рух схоплення найпростішого робота-маніпулятора у площині $\mathbf{R}^2$ здійснюється за відрізками прямих

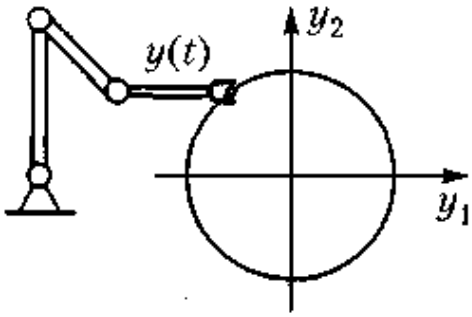


Рис. 1.38. Схема контурного руху охоплення найпростішого робота-маніпулятора

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c = 0 \qquad (1.9)$$

чи кіл

$$y_1^2 + y_2^2 - R^2 = 0. \qquad (1.10)$$

Ці рівняння визначають умови узгодженості вихідних змінних розглядуваної багатоканальної системи.

Задача декомпозиції на відміну від задачі узгодження полягає в усуненні взаємного впливу каналів системи з метою зведення задачі управління многозв'язним об’єктом до більш простих одно канальних задач. Її розв’язок передбачає створення додаткових, штучних, перехресних зв’язків між каналами системи, які компенсують небажану дію внутрішніх зв’язків

об'єкта управління, рис. 1.39. Це досягається з використанням відповідних алгоритмів управління, тобто корекції керуючих дій u_j.

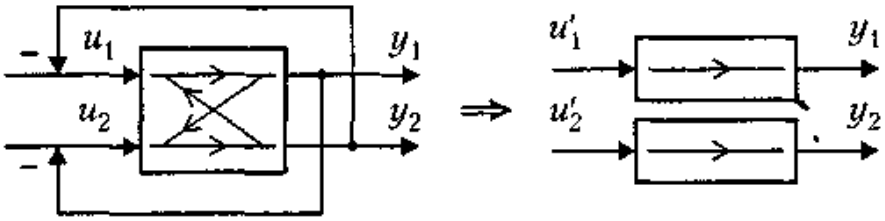


Рис. 1.39. Декомпозиція багатоканальної системи

До спеціальних задач, які виникають у системах автоматичного управління та автоматичного контролю, відносяться задачі оцінювання змінних стану та ідентифікації параметрів.

1.8.2. Блоки та алгоритми пристроїв управління. Регулятори та блоки задавання

До складу пристроїв управління системи, призначеної для розв'язування розглянутих раніше локальних задач входять блок задавання (ЗБ) та регулятор вихідних змінних, рис. 1.40.

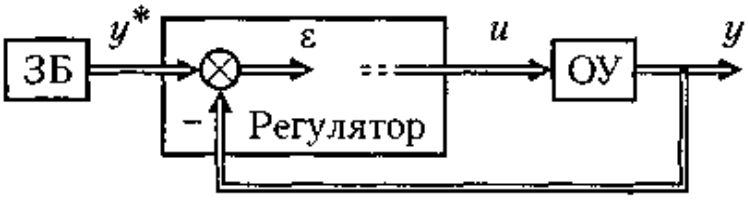


Рис.1.40. Багатоканальна система управління

У сучасних системах блоку необов'язково відповідає фізичний пристрій, у більшості випадків – це алгоритм чи програма розрахунків потрібних змінних (сигналів), що відповідає кібернетичному трактуванню цього питання.

Регулятором називається блок (алгоритм), який дає змогу розрахувати керуючу дію і з метою розв'язання локальної задачі управління. Алгоритмом управління називається набір аналітичних виразів, які використовуються для розрахунку керуючих дій. Типовий алгоритм управління за вихідною змінною y має вигляд:

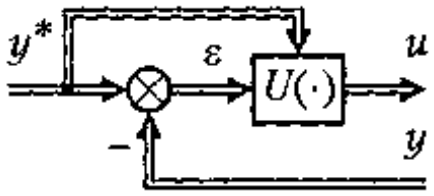


Рис. 1.41. До схеми типового управління за вихідною змінною

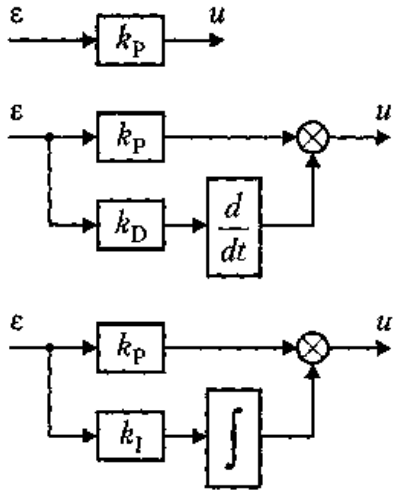


Рис. 1.42. До схем пропорційного, пропорційно-диференціадьного, пропорційно-інтегрального та пропорційно-інтегрально-диференціального регуляторів

$$u = U(\varepsilon, y^*, \ldots), \tag{1.11}$$

де розузгодження ε розраховується за формулою:

$$\varepsilon = y^* - y\ , \tag{1.12}$$

а оператором $U(\cdot)$ можуть бути алгебраїчні, трансцендентні, інтегро-диференціальні оператори, оператори Лапласа, булеві функції, та ін. Найпростішими алгоритмами управління (регуляторами) є регулятори відхилення типу:

$$u = U(\varepsilon). \tag{1.13}$$

До них відносяться типові регулятори – пропорційний, чи П-регулятор:

$$u = k_P \varepsilon \ , \qquad (1.14)$$

пропорційно-диференціальний, чи ПД-регулятор:

$$u = k_P \varepsilon + k_D \frac{d}{dt} \varepsilon, \qquad (1.15)$$

пропорційно-інтегральний, чи ПІ-регулятор:

$$u = k_P \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon d\tau \ , \qquad (1.16)$$

пропорційно-інтегрально-диференціальний, чи ПІД-регулятор:

$$u = k_P \varepsilon + k_D \frac{d}{dt} \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon d\tau \ , \qquad (1.17)$$

де k_P, k_D, k_I - сталі коефіцієнти. Призначення типових регуляторів та властивості систем управління, побудованих з їх використанням є окремим питанням.

Блоком задавання називається блок (алгоритм), який здійснює розрахунок дії задавання $y^*(t)$. У тривіальних випадках такими блоками є задаючі рукоятки та пульти, а у більш досконалих системах – апаратно та програмно реалізовані генератори сигналів задавання.

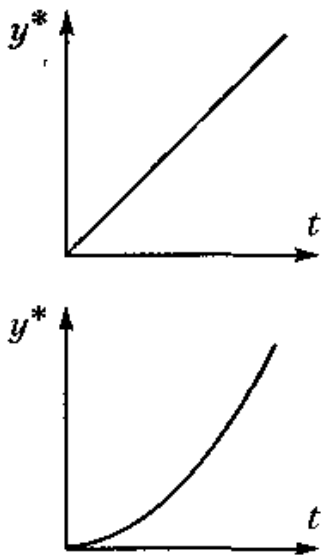


Рис.1.43. Рух об’єкта управління із сталими швидкістю та прискоренням

До найпростіших блоків задавання можна віднести блоки, які генерують сигнали для задач стабілізації, де $y^* = Y^* = const$, та елементарних задач слідкування. Для організації руху об’єкта управління з постійною швидкістю

$\dot{y} = V^* = const$ використовується алгоритм, який описується диференціальним рівнянням

$\dot{y}^* = V^*, \qquad y^* = Y^*,$

і забезпечує генерування дії задавання

$y^*(t) = Y^* + V^* t$.

Для отримання рівняння руху із сталим прискоренням $\ddot{y} = a^* = const$ застосовується алгоритм

$\ddot{y}^* = a^*, \qquad y^*(0) = Y^*, \qquad \dot{y}^*(0) = V^*,$

який забезпечує генерування сигналу

$$y^*(t) = Y^* + V^* t + \frac{a^* t^2}{2},$$

і т. д. Більш складним блоком задавання є інтерполятор – багатоканальний блок задавання, призначений для розрахунку поточних значень узгоджених дій задавання, тобто сигналів $y_j^*(t)$, підпорядкованих функціональній залежності типу

$$\varphi(y_1^*, y_2^*) = 0. \qquad (1.18)$$

Вихідні сигнали інтегратора використовуються у слідкуючих системах, які забезпечують розв’язок задач узгодженого управління, зокрема траекторного управління механічними системами з багатьма ланками, де потрібна траєкторія S руху робочої точки механізму задана рівнянням (1.8).

Приклад.

Інтерполятор системи управління роботом-маніпулятором, охоплення якого переміщується по колу (1.10), генерує двовимірну дію задавання

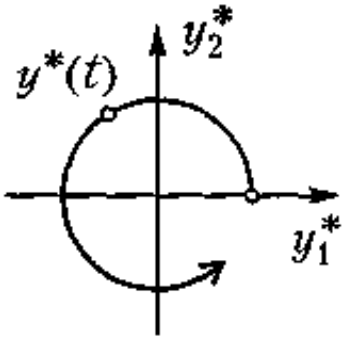


Рис. 1.44. Ілюстрація до переміщення охоплення (приклад)

$y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t))$

і описується системою диференціальних рівнянь

$\dot{y}_1^* = y_2^*, \qquad \dot{y}_2^* = -y_1^*$
(1.19)

з початковими значеннями $y_{10}^* = R, \qquad y_{20}^* = 0.$ Система має розв'язок

$y_1^* = R\cos t, y_2^* = R\sin t,$ (1.20)

який задовольняє рівняння (1.10).

Багато сучасних САУ будуються як системи управління станом об'єкта, тобто забезпечують розв'язок задач стабілізації стану

$x = x^* = const$

чи узагальнених задач слідкування – дотримання заданого закону зміни вектора станів:

$x = x^*(t),$

де $x^{T}* = \{x_1 i^{T}*\}$ – вектор дій задавання за станом. Алгоритми управління таких систем мають вигляд

$u = U(e, x^*, \ldots),$ (1.21)

де вектор розузгодження, чи похибок, *e* розраховується за формулою:

$e = x^* - x$. (1.22)

Структура системи управління станом ілюструється рис.

Рис. 1.45. Система управління станом.

1.8.3. Спеціальні задачі та блоки систем управління

Допоміжні задачі визначення (ідентифікації) не вимірюваних змінних та невідомих параметрів виникають у САУ та у системах автоматичного контролю, а саме: задача спостереження, тобто оцінювання не вимірюваних змінних стану об'єкта за умови дії шумів (фільтрація, згладжування, передбачення); задача ідентифікації параметрів, тобто оцінювання невідомих параметрів системи. Для розв'язування цих задач використовуються спостережувачі та ідентифікатори. Спостережувачем називається блок (алгоритм), рис. 1.46, призначений для оцінювання не вимірюваних змінних стану ОУ x_i чи зовнішнього середовища. Структура спостерігача ОУ включає до себе модель об'єкта управління, яка виробляє поточні значення оцінки $\hat{y}(t)$ вихідної змінної $y(t)$ та оцінки $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$. Поведінка моделі корегується за рахунок зворотних зв'язків за похибкою спостереження (нев'язкою)

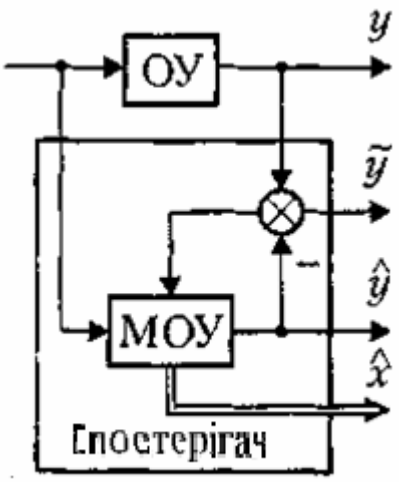


Рис. 1.46. Схема блоку (алгоритму) спостережувача

$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t).$

Спостережувачі застосовуються у системах управління станом, рис. 1.45, у яких не усі змінні стану x_i можна виміряти чи результати виміру містять значні похибки. У цих випадках розглянутий раніше алгоритм управління (1.21) має вигляд

$$u = U(e, x^*, \ldots), \qquad (1.23)$$

де оцінка розузгодження $\hat{e}$ розраховується за формулою:

$$\hat{e} == x^{*} - \hat{x}. \qquad (1.24)$$

Математична модель (рівняння) об’єкта управління містить коефіцієнти θ_i – масо-інерційні, електричні та термодинамічні параметри керованого процесу та інших використовуваних у САУ пристроїв Параметри об’єднуються у вектор параметрів $\theta = \{\theta_i\}$. У тих випадках, коли значення параметрів змінюються у часі чи заздалегідь невідомі, з’являється потреба у використанні ідентифікаторів параметрів.

Ідентифікатором називається блок (алгоритм) типу

$$\hat{\theta} = \Theta(x, u, \ldots) \qquad (1.25)$$

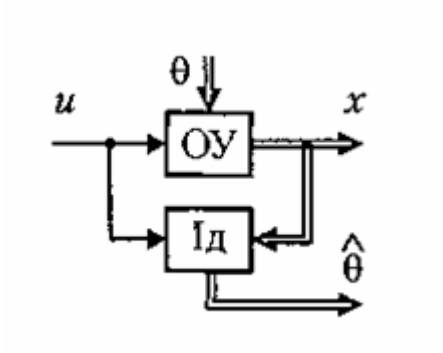


Рис. 1.47. Схема ідентифікатора

де $\Theta(\cdot)$ - динамічний оператор, призначений для оцінювання параметрів ОУ за наявною інформацією про поточний стан $x(t)$ та вхідну дію $u(t)$ об’єкту, тобто для розрахунку у реальному часі значень $\hat{\theta}(t)$ – поточної оцінки вектора θ. Ідентифікатори застосовуються у адаптивних системах управління, у яких параметри регулятора не встановлюються завчасно, а настроюються у процесі роботи. У таких системах часто використовуються адаптивні алгоритми управління типу

$$u = U(e, x^{*}, \hat{\theta}, \ldots), \qquad (1.26)$$

а вектор оцінки $\hat{\theta}$ можна отримати з використанням алгоритму ідентифікації (1.25).

2. Математичні моделі типу вхід-вихід

Математичною моделлю динамічної системи (детермінованою) називається математичний опис (детермінований, у вигляді математичних символів), який однозначно визначає розвиток процесів у системі – її рух. У залежності від типу сигналів розрізняють неперервні та дискретні моделі систем, а у залежності від використаних операторів – лінійні та нелінійні, а також часові та частотні моделі. До часових відносяться моделі, у яких аргументом є час, неперервний чи дискретний. Це диференціальні чи різницеві рівняння, записані у явній чи у операторній формі. Частотні моделі передбачають використання операторів, аргументом яких є частота відповідного сигналу, тобто оператори Лапласа, Фур'є та ін.

2.1. Лінійні моделі, перехідні процеси, характеристики моделей. Структурні схеми

Модель вхід-вихід (ВВ) – це опис зв'язку вхідних та вихідних сигналів динамічної системи, необхідність якого появляється у процесі розгляду поведінки окремих блоків (частин), зокрема об'єкта управління та всієї системи управління у цілому. Різниці у математичному описі блоків та системи практично немає, проте є необхідність використання різних позначень. Зокрема, вхідним сигналом САУ є дія задавання $y^*(t)$, а вихідним – змінна $y(t)$.

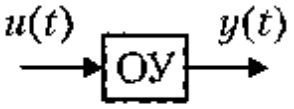


Рис. 2.1. Ілюстрація моделі вхід-вихід для блоку та для системи у цілому

Лінійну модель вхід-вихід для одно канальної динамічної системи можна зобразити звичайним диференціальним рівнянням типу:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} +$$

$+b_m u,$

(2.1)

де a_i, b_i - коефіцієнти (параметри моделі), $a_0 > 0$, $b_0 > 0, n$ – порядок моделі, $0 \le m < n$. Рівняння (2.1) пов'язує вхідні сигнали u(t) та їх похідні $u^{(i)}(t)$ з вихідними сигналами y(t) та їх похідними $y^{(i)}(t)$ на певному інтервалі $t \in [t_0, t_f]$. Значення $y(t_0) = y_0, y(t_0) = y_0, .., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ називаються початковими значеннями (умовами), а число $r = n - m \ge 1$ відносним ступенем моделі. Розрізняють стаціонарні системи, для яких значення параметрів незмінні $a_i = const$, $b_i = const$, і можна вважати $t_0 = 0$, та нестаціонарні моделі, параметри яких є функціями часу, тобто $a_i = a_i(t)$, $b_i = b_i(t)$. У випадку, коли $a_0 = 1$, рівняння (2.1) називається приведеним. Система, для якої $u(t) = 0$, називаються автономною. Опис автономної системи дається однорідним диференціальним рівнянням типу

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = 0.$
(2.2)

Модель типу (2.1) можна подати у операторній формы, для чого слід ввести оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$, покладемо $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$. З врахуванням цих позначень рівняння (2.1) перетворюється у операторну форму

$a(p)y(t) = b(p)u(t),$
(2.3)

де використовуються диференціальні оператори

$$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n, \quad (2.4)$$
$$b(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m. \quad (2.5)$$

Оператор $a(p)$ називається характеристичним поліномом диференціального рівняння (2.1), а комплексні числа $p_i, i = \overline{1, n}$, що є коренями характеристичного рівняння

$a(p) = 0.$
(2.6)

називаються полюсами системи (2.1). Диференціальний оператор $b(p)$ - характеристичний поліном правої частини. Корені рівняння

$$b(p) = 0,$$
(2.7)

тобто комплексні числа p_i^0, $i = \overline{1,m}$, називаються нулями системи (2.1). З рівняння (2.3) знайдемо явний зв'язок між змінними y(t) та u(t) у вигляді операторного рівняння:

$$y(t) = W(p)u(t),$$
(2.8)

де інтегрально-диференціальний оператор

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$$
(2.9)

Називається передатною функцією системи (2.1). Перевага використання операторних моделей типу (2.1), (2.8) полягає у скороченості запису відповідних рівнянь, та у зручності перетворення складних моделей.

Розглянемо окремий випадок динамічної системи з коефіцієнтами $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0, b_m = b \neq 0$, відповідна система має відносний ступінь *r=n-1*, і нулі відсутні. Рівняння (2.1) матиме вигляд

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0, \qquad (2.10)$$

а рівняння (2.3) –

$$a(p)y(t) = bu(t),$$
(2.11)

а рівняння (2.8) –

$$y(t) = \frac{b}{a(p)}u(t).$$
(2.12)

Приклад. Нехай $b(p) = b$, $n = 2$. Диференціальне рівняння системи має вигляд

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu,$$
(2.13)

з початковими умовами $y(0) = y_0$, $y(0) = y_0$. Тут $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ - швидкість зміни вихідної змінної. Операторні форми моделі –

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = bu(t)$$
(2.14)

та

$$y(t) = \frac{b}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} u(t)$$
(2.15)

має два дійсних чи комплексно-спряжених корені:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Приклад. Моделі вхід-вихід нагрівальної печі, RC-ланцюга та розгону електронагрівача описуються диференціальним рівнянням першого порядку

$$Tx_2(t) + x_2(t) = Ku(t),$$
(2.16)

u – вихідна напруга, x_2 – вихідний сигнал (температура, вихідна напруга чи кутова швидкість відповідно), T, K – сталі коефіцієнти (параметри).

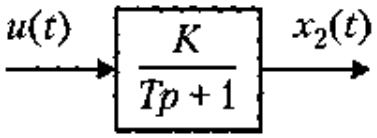


Рис. 2.2. Схема моделі

Операторна форма моделі (рис. 2.2) має вигляд

$$(Tp+1)x_2(t) = Ku(t).$$
(2.17)

Тут $Tp+1=0-$ характеристичне рівняння, яке має один корінь, який є полюсом системи, $p_1 = -\frac{1}{T}$. З рівняння (2.17) знаходимо явний зв'язок входу та виходу

$$x_2(t) = \frac{K}{Tp+1}u(t).$$
(2.18)

Тобто передатною функцією блоку є оператор

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Рівняння (2.16) можна привести до вигляду

$$\dot{x}_2(t) + ax_2(t) = bu(t),$$
(2.19)

де $a = \frac{1}{T}$, $b = \frac{K}{T}$. Тоді операторна форма (2.17) запишеться у вигляді

$$(p+a)x_2(t) = bu(t),$$
(2.20)

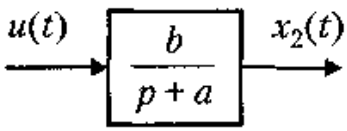


Рис. 2.3. До операторної форми рівняння моделі

а форма (2.18) –

$$x_2(t) = \frac{b}{p+a}u(t).$$
(2.21)

Приклад. Розглянемо поступовий рух матеріальної точки з масою m під дією сили – вхідної дії $u = F(t)$. Така динамічна система, рис. 2.4, описується рівнянням другого порядку (згідно з другим законом Ньютона)

$m\ddot{y}(t) = u(t)$
(2.22)

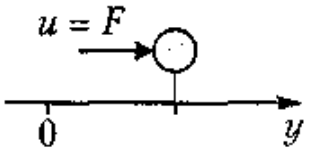


Рис. 2.4. Схема поступального руху матеріальної точки під дією сили F

з початковими умовами $y_0 = y(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$. Тут $y(t)$ – лінійне переміщення. Операторна форма моделі приймає вигляд

$mp^2 y(t) = u(t)$,
(2.23)

А характеристичне рівняння системи, яке має вигляд,

$mp^2 = 0$

має два корені, полюси системи, $p_{1,2} = 0$. З рівняння (2.23) знаходимо явний зв'язок між параметрами входу та виходу, рис. 2.5

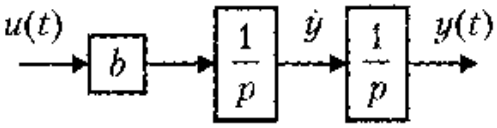


Рис. 2.5. Схема знаходження явного зв'язку між параметрами входу і виходу у задачі опису поступального руху матеріальної точки

$y(t) = \frac{b}{p^2} u(t)$,
(2.24)

де $b = \frac{1}{m}$. Тобто передатною функцією блоку є оператор

$W(p) = \frac{b}{p^2} = b\frac{1}{p}\frac{1}{p}$.

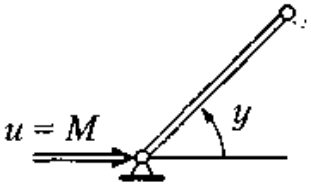


Рис. 2.6. Схема руху обертальної ланки з моментом інерції J

Рух обертальної ланки з моментом інерції J , під дією моменту сили $u = M(t)$ також описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$Jy(t) = u(t), \quad (2.25)$$

де $y(t)$ – кутове переміщення. Внаслідок ідентичності останнього виразу та рівняння (2.22) всі моделі поступового та обертового рухів співпадають.

Найпоширенішою графоаналітичною формою моделі динамічної системи є структурна схема – різновид напрямленого графу. Елементами такої схеми є, рис. 2.7: буквені позначення сигналів $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ і т.д.; буквені позначення операторів, наприклад, $W(p)$; графічні позначення – лінії зв'язку та стрілки, які вказують напрямок дії сигналів, рис. 2.7. а, вузли, які відповідають розгалуженням сигналів, рис. 2.7. б, блоки з вказівкою операторів, вхідних та вихідних сигналів, рис. 2.7. в.

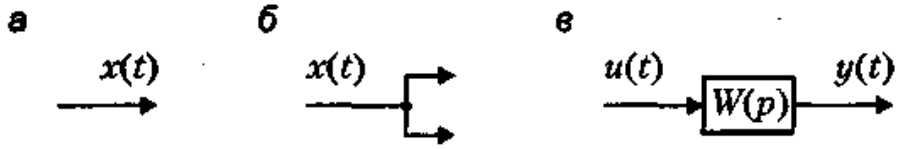


Рис. 2.7. Елементи структурної схеми

До найпростіших блоків, які використовуються у структурних схемах, відносяться, зокрема: блок порівняння (рис. 2.8. а); алгебраїчний суматор (рис. 2.8. б); пропорційна ланка (рис. 2.8. в); інтегратор (рис. 2.8. г).

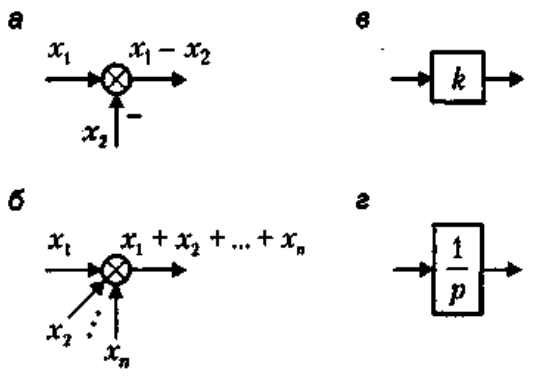


Рис. 2.8. Найпростіші блоки структурної схеми

2.2.Багатоканальні моделі.

На початку розглянемо багатоканальну систему з незалежними (автономними) каналами. Ця система описується m операторними рівняннями

$$a_1(p)y_1(p) = b_1u_1(t),$$
$$a_2(p)y_2(p) = b_2u_2(t),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_m(p)y_m(p) = b_mu_m(t),$$

кожне з яких характеризує поведінку одного з її каналів, рис. 2.9. Розглянемо вектори виходу y та управління u: $y = \{y_j\} = |y_1, y_2, \dots, y_m|^T$, $u = \{u_j\} =$ відповідно, і перепишемо систему рівнянь у векторно-матричній формі:

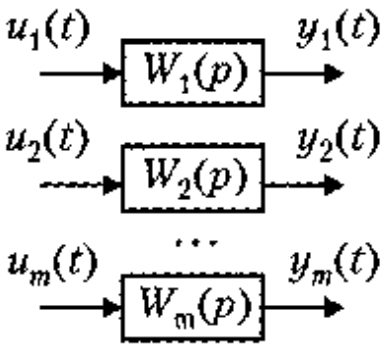


Рис. 2.10. Спрощена схема багатоканальної моделі

$$\begin{vmatrix} a_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(p) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m(p) \end{vmatrix} y(t) = \begin{vmatrix} b_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(p) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_m(p) \end{vmatrix} u(t),$$

або компактніше

$$A(p)y(t) = B(p)u(t).$$
(2.26)

Якщо матриця $A(p)$ невироджена (з відмінним від нуля визначником, має обернену матрицю), то обернена матриця A^{-1} буде

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_1^{-1}(p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1}(p) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m^{-1}(p) \end{vmatrix},$$

то з рівняння (2.26) знайдемо

$$y(t) = W(p)u(t),$$
(2.27)

де W(p)={W_1ij (p)} - передатна матриця системи (матричний інтегродиференціальний оператор), яка обчислюється у вигляді

$$W(p) = A^{-1}(p)B(p) = \begin{vmatrix} W_{11}(p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{22}(p) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & . & \dots & W_{mm}(p) \end{vmatrix}.$$

Можна бачити, що у розглядуваному випадку передатна матриця є діагональною, тобто

$$W(p) = diag\ \{W_{ii}(p)\} = diag\ \left\{\frac{b_i(p)}{a_i(p)}\right\}.$$

Далі розглянемо многозв'язну систему, тобто багатоканальну систему із зв’язаними каналами, яка описується системою операторних рівнянь:

$$a_{11}(p)y_1 + a_{12}(p)y_2 + \dots + a_{1m}(p)y_m = b_{11}(p)u_1 + \dots + b_{1m}(p)u_m,$$
$$a_{21}(p)y_1 + a_{22}(p)y_2 + \dots + a_{2m}(p)y_m = b_{21}(p)u_1 + \dots + b_{2m}(p)u_m,$$
……

$$a_{m1}(p)y_1 + a_{m2}(p)y_2 + \cdots + a_{m1}(p) = b_{mm}(p)u_1 + \cdots + b_{mm}(p)u_{mm}.$$

Система приводиться до векторно-матричної форми (2.26), де

$$A(p) = \begin{vmatrix} a_{11}(p) & a_{12(p)} & \dots & a_{1m}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \dots & a_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1}(p) & a_{m2}(p) & \dots & a_{mm}(p) \end{vmatrix},$$

$$B(p) = \begin{vmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) & \dots & b_{1m}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) & \dots & b_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1}(p) & b_{m2}(p) & \dots & b_{mm}(p) \end{vmatrix},$$

та формі (2.27), де передатна матриця визначається виразом

$$W(p) = A^{-2}(p)B(p) = \begin{vmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \dots & W_{1m}(p) \\ W_{12}(p) & W_{22}(p) & \dots & W_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & \dots & . \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \dots & W_{mm}(p) \end{vmatrix}.$$

Модель (2.27) можна також записати у скалярній формі:

$$y_1 = W_{11}(p)u_1 + W_{12}u_2 + \cdots + W_{1m}u_m.$$
$$y_2 = W_{21}(p)u_1 + W_{22}u_2 + \cdots + W_{2m}u_m.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_m = W_{m1}(p)u_1 + W_{m2}u_2 + \cdots + W_{mm}.$$

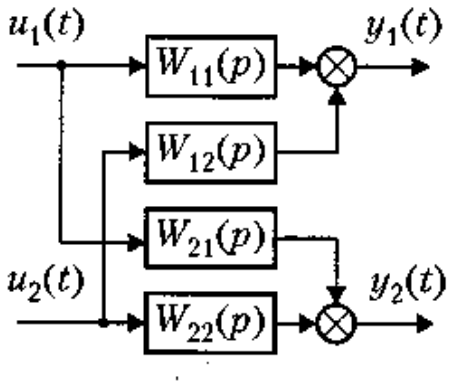


Рис.2.11. До моделі управління двоканального об’єкта

Діагональні оператори $W_{ii}(p)$ відносяться до основних каналів, а інші передатні функції $W_{ij}(p)$, $i \neq j$, характеризують перехресні зв'язки багатоканальної системи. Для двоканальної системи, рис. 2.11, $(m = 2)$ маємо:

$$y_1 = W_{11}(p)u_1 + W_{12}(p)u_2,$$
$$y_2 = W_{21}(p)u_1 + W_{22}(p)u_2,$$

де $W_{11}(p)$, $W_{22}(p)$ - передатні функції основних каналів системи, а $W_{12}(p)$, $W_{21}(p)$ - передатні функції перехресних зв'язків.

2.3. Моделі збурених систем.

Збурення $f(t)$, рис. 2.12, яке характеризує вплив на об'єкт зовнішнього середовища, розглядається як додатковий вхідний сигнал.

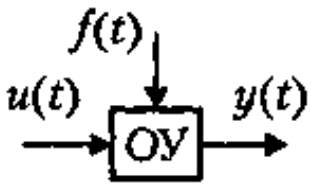


Рис. 2.12. Схема моделі збурених систем

У цьому випадку лінійна модель одно канальної динамічної системи має вигляд

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u + d_0 f^{(k)} + d_1 f^{(k-1)} + \cdots + d_{k-1}\dot{f} + d_k f. \quad (2.28)$$

де d_i – коефіцієнти, які визначають вплив на процеси збурення $f(t)$ та його похідних $f^{(i)}$, $d_0 \neq 0$, $0 \leq k < n$. Після підстановки операторів диференціювання p^i та відповідних перетворень отримуємо операторну форму рівнянь (2.28):

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + d(p)f(t), \quad (2.29)$$

де використовується диференціальний оператор

$$d(p) = d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + \cdots + d_{k-1} p + d_k ,$$

та форму

$$y(t) = W(p)u(t) + W_f(p)f(t), \qquad (2.30)$$

де $W_f(p) = \dfrac{d(p)}{f(p)}$ - передатна функція за збуренням $f(t)$. У окремому випадку, коли $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0, \quad b_m = b \neq 0, \quad d_0 = d_1 = \cdots = d_{k-1} = 0,$ $d_k = d \neq 0,$ модель приймає вигляд

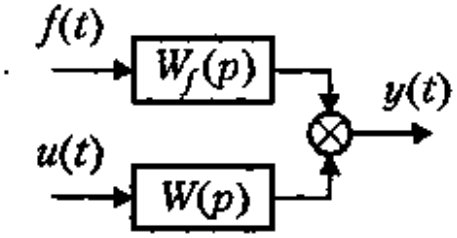


Рис. 2.13.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu(t) + df(t), \qquad (2.31)$$

модель (2.29) –

$$a(p)y(t) = bu(t) + df(t), \qquad (2.32)$$

а модель (2.30) –

$$y(t) = \frac{b}{a(p)}u(p) + \frac{d}{a(p)}f(t). \qquad (2.33)$$

Приклад. Нехай $b(p) = b, d(p) = d, n = 2.$ Диференціальне рівняння збуреної системи має вигляд

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu + df, \qquad (2.34)$$

а операторні форми –

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)y(t) = bu(t) + df(t) \qquad (2.35)$$

та

$$y(t) = \frac{b}{a_0p^2 + a_1p + a_2}u(t) + \frac{d}{a_0p^2 + a_0p + a_2}f(t).$$
(2.36)

Приклад. Рух матеріальної точки з масою m за умови дії сили опору (збурююча дія) $f = -F_c(t)$ описується рівнянням

$$m\ddot{y} = u(t) + f(t), \qquad (2.37)$$

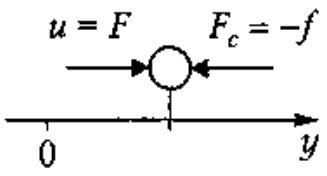


Рис. 2.14. Схема руху матеріальної точки

а рух обертової ланки за наявності моменту опору $f = -M_c$ – рівнянням

$$J\ddot{y} = u(t) + f(t). \qquad (2.38)$$

У обох випадках операторна форма (модель (2.30)) має вигляд

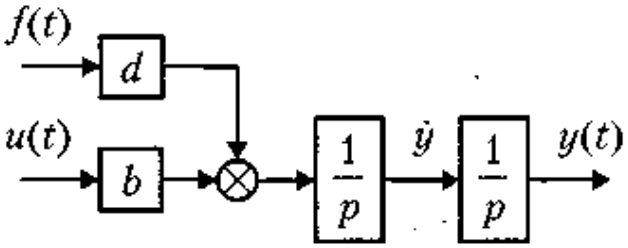


Рис. 2.15. Схема до операторної форми моделі руху матеріальної точки

$$y(t) = \frac{1}{p^2}(bU(t) + df(t)), \qquad (2.39)$$

де $d = b = \frac{1}{m}$ або $d = b = \frac{1}{J}$ відповідно.

2.4. Перехідні процеси та характеристики моделей вхід-вихід.

Розглядатимемо лінійні стаціонарні динамічні системи, які описуються на інтервалі часу $[0, t_f)$, $t_f > 0$, диференціальним рівнянням (2.1) з

початковими умовами $y(0) = y_0, y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}$ та достатньо гладкою вхідною дією $u(t)$.

Перехідні процеси. Розв'язком диференціального рівняння (2.1) називається функція

$$y(t) = y(t, y_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}), \qquad (2.40)$$

яка за умови $t = 0$ задовольняє початкові умови, а для будь-яких $t \in [0, t_f)$ - рівняння (2.1). З цим означенням пов'язано поняття фазових змінних системи, до яких відносяться функції $y(t), y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$, які задовольняють рівняння (2.1), а також поняття перехідного процесу.

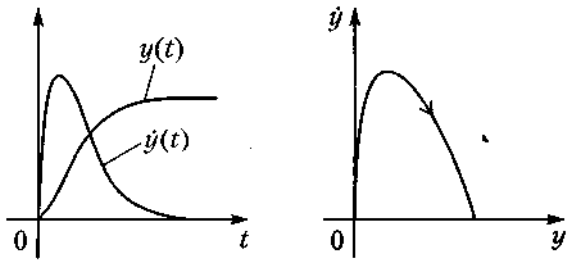


Рис. 2.16. Перехідні процеси: часові діаграми та фазова траекторія

Перехідним процесом називають процес зміни у часі різних змінних системи (фазових та вихідних змінних, видхилень, і т.д.), у ході якого система змінює свій стан. Перехідний процес може бути зображений у аналітичній чи графічній формі. До графічних форм перехідного процесу відносяться: часові діаграми змінних системи - $y(t), y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$; фазові траєкторії.

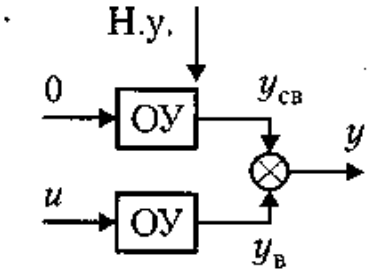


Рис. 2.17. Ілюстрація розв'язку $y(t)$

Розв'язок $y(t)$ можна представити у формі

(2.41)

тобто містить дві складові. Вимушена складова $y_0(t)$ відповідає перехідному процесу системи (2.1) за початкових умов $y_0^i = 0$, та $u(t)$, вільна складова $y_1{}^{\text{cB}}((t)$, або перехідний процес автономної системи, відповідає розв'язкам диференціального рівняння (2.2) і залежить від початкових умов $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

Процеси автономних систем. Поведінка автономної системи та вільна складова перехідного процесу залежать від полюсів системи, тобто коренів характеристичного рівняння $a(p) = 0.$ Корені цього рівняння можуть бути дійсними $p_i = \alpha_i$ або комплексно-спряжені пари $p'_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i, \alpha_i = Re\, p'_{i,i+1}$, $\beta_i = Im\, p'_{i,i+1}$. Для випадку попарно різних (некратних) коренів характеристичного рівняння вільна складова визначається виразом

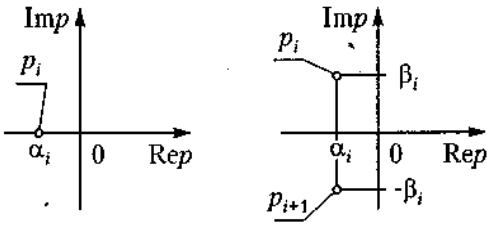


Рис. 2.18. Полюси системи

(2.42)

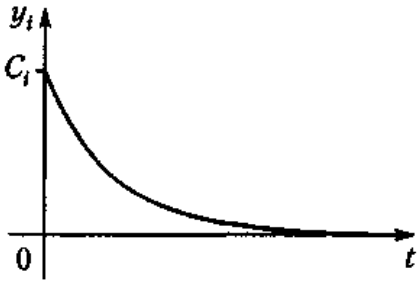
де C_i - невизначені коефіцієнти, $y_i = C_i e^{p_i t}$ - вільні коливання системи, або моди. Дійсному кореню $p_i = \alpha_i$ відповідає аперіодична складова процесу

$y_i = C_i e^{p_i t},$
(2.43)

а парі комплексно-спряжених коренів $p'_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ - коливальна складова перехідного процесу

$$p'_{i,i+1} = e^{\alpha_i t}[C_{1i} \cos(\beta_i t) \pm jC_{2i} \sin(\beta_i t)] = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t \pm \varphi_i),$$
(2.44)

де функції A_i – амплітуда, φ_i – фаза, β - кутова частота коливань, аргументами яких є $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.



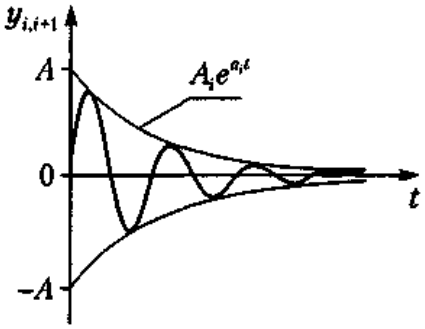


Рис. 2.19. Аперіодичний процес Рис. 2.20. Коливальний процес

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то вираз (2.42) невірний. Парі дійсних кратних коренів, кожний з яких дорівнює α_i, відповідає така аперіодична складова перехідного процесу

$$y = (C_i + C_{i+1}t)e^{\alpha_i t}, \quad (2.45)$$

а парі нульових коренів, кожен з яких дорівнює α_i=0, відповідає складова

$$y = C_i + C_{i+1}t. \quad (2.46)$$

Для знаходження часткового розв'язу , який відповідає заданим значенням початкових умов $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, та значень C_i у формулі (2.42) використовується метод невизначених коефіцієнтів. У відповідності з цим методом з формули (2.42) слід отримати загальні вирази для $y(t), y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ і за умови $t = 0$ записати n алгебраїчних рівнянь з n змінними $C_i, i = \overline{1,n}$, які визначаються з використанням відомих методів. Ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 + \dots + C_n, \\ \dot{y}_0 = C_1 p_1 + C_2 p_2 + \dots + C_n p_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_0^{n-1} = C_1 p_1^{n-1} + C_2 p_2^{n-1} + \dots + C_n p_n^{n-1}. \end{cases} \quad (2.47)$$

У векторно-матричній формі система (2.470 має вигляд

$$x_0 = PC,$$

де

$$x_0 = \left|y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}\right|^T, \qquad C = |C_1, c_2, \dots, C_n|^T, P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

звідки можна знайти вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів

$C = P^{-1}x_0.$

Якщо за деяких початкових значеннях має місце тотожність

де y^*=const, то значення $y = y^*$ називається рівноважним значенням вихідної змінної чи положенням рівноваги автономної системи (2.2). У положенні рівноваги мають місці рівності

(2.48)

Після підстановки (2.48) у рівняння (2.2) матимемо
$a_n y^* = 0.$
(2.49)

За умови, що $a_n \neq 0$, маємо, що єдиним положенням рівноваги розглядуваної системи є початок координат

$y^* = 0,$
(2.50)

а за умови $a_n \neq 0$, маємо нескінченну множину рівноважних значень. Якщо дійсна частина $Re\, p_i = \alpha_i$ деякого кореня p_i строго від'ємна, $Re\, p_i < 0,$ то відповідна мода з часом затухає: $lim_{t\to\infty} y_i(t) < 0.$ Якщо умова $Re\, p_i < 0$ має місце для всіх коренів $(i = \overline{1,n})$, то затухаючою є вільна складова перехідного процесу у цілому: причому граничне значення вихідної змінної точно співпадає з положенням рівноваги автономної системи $y^* = 0.$

Вимушений рух. Вимушена складова перехідного процесу залежить від вхідної дії і може бути аналітично визначена тільки для ряду окремих випадків, які відповідають певним типам вхідних сигналів. Найпоширенішими сигналами є одиничний стрибок, дельта-функція та гармонічна вхідна дія. Розглянемо реакцію системи на одиничну ступінчату функцію (одиничний стрибок, рис. 2.21)

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

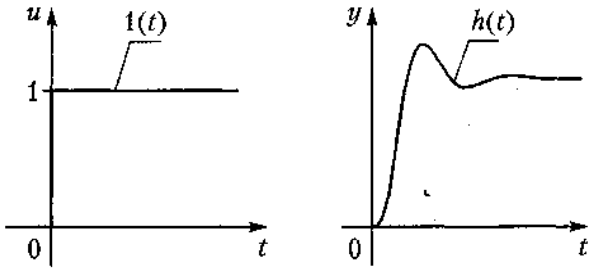


Рис. 2.21. Одиничний стрибок та перехідна функція

Перехідний процес $y = h(t)$ системи (2.1) за нульових початкових умов та дії на її вхід одиничної ступінчатої функції називається перехідною функцією (перехідною характеристикою) системи, тобто

$$h(t) = y(t)_{\substack{y_0^{(i)}=0 \\ u=1(t)}} = y_0(t)_{u=1(t)}. \qquad (2.51)$$

Розглянемо реакцію системи на одиничну імпульсну функцію (дельта-функцію) $\delta(t)$, яка визначається у вигляді

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t), \qquad (2.52)$$

чи імпульс з нескінченно великою амплітудою *A* та нескінченно малою тривалістю τ , рис. 2.22, який задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (2.53)$$

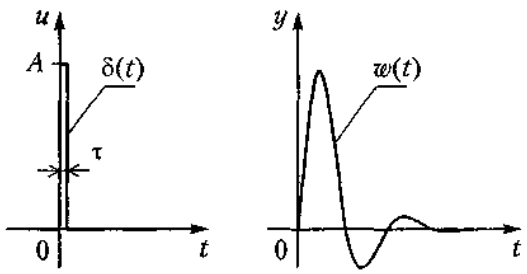


Рис. 2.22. Дельта-функція та вагова функція

Перехідний процес $y = w(t)$ системи (2.1) за нульових початкових умов та дії на її вхід імпульсної функції називається ваговою функцією (характеристикою) системи, тобто

$$w(t) = y(t)_{\substack{y_0^{(i)}=0 \\ u=\delta(t)}} = y_0(t)_{u=\delta(t)}. \qquad (2.54)$$

Враховуючи означення дельта-функції (2.52), можна отримати зв'язок вагової та перехідної функцій:

$$w(t) = \frac{d}{dt}h(t). \qquad (2.55)$$

Для довільної вхідної дії $u(t)$ вимушену складову перехідного процесу системи (2.1) можна визначити з формули

$$y_{\text{В}}(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad (2.56)$$

(інтеграл згортки). У випадку, коли $u(t) = U_0 1(t)$, $U_0 = const$, в силу властивості (2.55) має місце

$$y_{\text{В}}(t) = U_0 \int_0^t w(t-\tau)d\tau = U_0 h(t).$$

В загальному випадку знаходження вимушеної складової перехідного процесу з використанням виразів типу (2.56) є досить складною задачею, більш простою задачею є визначення усталеної складової перехідного процесу.

Усталений рух. Рух системи за умови великих значень t ($t \to \infty$), називається усталеним режимом. Усталеною складовою перехідного процесу $y_у(t)$ називається вимушена складова $y_в(t)$ за умови $t \to \infty$, тобто

$$y_у(t) = \lim_{t \to \infty} y_в(t).$$
(2.57)

Останній вираз передбачає існування границі функції $y_в(t)$. У загальному випадку, рис. 2.23, усталена складова визначається з умови

$$\lim_{t \to \infty} (y_у(t) - y_в(t)) = 0.$$
(2.58)

Функція $y_у(t)$ є частковим розв'язком рівняння (2.1), отриманим за певних, як правило, нульових початкових умов, який залежить від його правої частини, тобто вхідної дії $u(t)$.

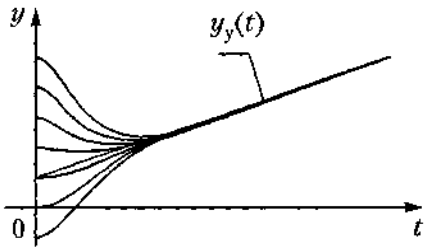


Рис. 2.23. Перехідні процеси та усталена складова

Статичний режим. Окремий випадок розв'язку системи (2.1) відповідає сталій вхідній дії $u = U_0 = const$ та усталеній складовій

$$y = Y_0 = \text{const}.$$
(2.59)

Нехай вільна складова системи затухає, тобто має місце властивість

$$y(t) = y_п(t) + y_у(t),$$
(2.60)

де $y_п(t)$ - перехідна складова, або загальний розв'язок рівняння (2.1), який можна знайти у формі

$$y_п(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\mu_i t},$$
(2.61)

де C_i - сталі (невизначені) коефіцієнти.
Це означає, що

$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_y.$

Остання формула свідчить, що за умови достатньо великих t у системі відсутній рух, що відповідає статичному режиму роботи.

Рис. 2.24. Ілюстрація розв'язку рівняння динаміки для статичного режиму

Розв'язок рівняння (2.1) для статичного режиму шукається у вигляді

$y_y = Ku,$
(2.62)

де K - невизначений коефіцієнт. З врахуванням рівності $u = U_0$=const, можна записати

$u^{(i)} = 0, \qquad i = \overline{1, n-1},$
(2.63)

а з рівняння(2.62) знаходимо, що

$y^{(i)} = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$
(2.64)

Після підстановки (2.63), (2.64) у (2.1) отримаємо алгебраїчний вираз

$a_n y_y = b_m u.$
(2.65)

Нехай $a_n \neq 0.$ Тоді коефіцієнт K знаходиться за формулою

$K = \frac{b_m}{a_n}.$
(2.66)

За умови $a_n = 0$ маємо $b_m u = 0, b_m \neq 0$, тобто у цьому випадку (2.62) не є частковим розв'язком рівняння (2.1). Залежність усталеної складової (вихідної змінної після закінчення перехідного процесу) y_y від величини вхідного сигналу $u = \text{const}$ називається статичною характеристикою динамічної системи. Для лінійних систем типу (2.1) статична характеристика K

представляється рівнянням прямої (2.62), рис. 2.25, кутовий коефіцієнт якої розраховується за формулою (2.66) і називається коефіцієнтом передачі чи статичним коефіцієнтом системи.

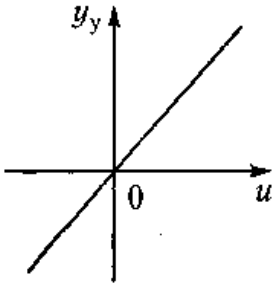


Рис. 2.25. Графічна ілюстрація статичної характеристики

Система (2.1), для якої $a_n \neq 0$, і існує статична характеристика, називається статичною системою. Астатичною називається система, для якої $a_n = 0$, і статичної характеристики не існує, усталений режим неможливий. Знаходження статичної характеристики зводиться до операції розрахунку статичного коефіцієнта K за формулою (2.66), у якій a_n, b_m - відповідні коефіцієнти диференціального рівняння (2.1). Крім того, статичну характеристику можна отримати з операторної форми (2.3) або (2.8), зіставивши відповідні вирази матимемо

Рис. 2.26. Схема опису статичного режиму

$$\frac{b_m}{a_n} = K = W(0) = \frac{b(0)}{a(0)}.$$

(2.67)

Тобто у статичному режимі система описується рівнянням

$y_y = W(0)u.$
(2.68)

2.5. Елементарні ланки.

Елементарними ланками, рис. 2.27, називаються найпростіші складові частини (блоки) системи, функціонування яких описується алгебраїчними чи диференціальними рівняннями першого- другого порядку :

$a_0\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_2x_1 = b_1\dot{x}_2 + b_2x_2,$
(2.69)

Рис. 2.27. Схема елементарної ланки

де $x_1 = x_1(t)$ - вихідна змінна, $x_2 = x_2(t)$ – вхідна змінна, a_i, b_i – сталі коефіцієнти (параметри). Рівняння 92.69) можна записати у операторній формі:

$$x_1 = \frac{b_1p + b_2}{a_0p^2 + a_1p + a_2}x_2,$$
(2.70)

тобто передатна функція елементарної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{b_1p + b_2}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$
(2.71)

Пропорційна (без інерційна) ланка. Ця ланка, рис. 2.28, описується

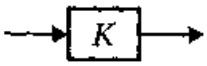


Рис. 2.28. Схема пропорційної (без інерційної) ланки

алгебраїчним рівнянням

$x_1 = Kx_2,$
(2.72)

де K - коефіцієнт передачі (пропорційності). Рівняння (2.72) внаслідок відсутності у блоку інерційних властивостей співпадає із статичною характеристикою. Перехідна функція пропорційної ланки –

$$h(t) = K1(t).$$
(2.73)

Прикладом пропорційних ланок можуть бути вимірювальні потенціометри, редуктори, підсилювачі напруги, та ін.

Аперіодична ланка. Ця ланка описується диференціальним рівнянням

$$Tx_1 + x_1 = Kx_2$$
(2.74)

або у приведеній формі – рівнянням

$$\dot{x}_1 + ax_1 = bx_2,$$
(2.75)

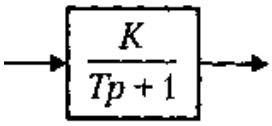


Рис. 2.29. Схема аперіодичної ланки

де K - коефіцієнт передачі, $T > 0$ - стала часу, $a = \frac{1}{T}, b = \frac{K}{T}$.

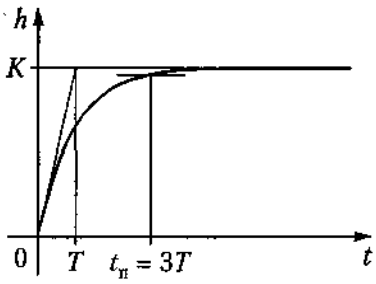


Рис. 2.30. Перехідна функція аперіодичної ланки

Операторна форма ланки має вигляд

$$x_1 = \frac{K}{Tp + 1} x_2$$
(2.76)

або, відповідно,

$$x_1 = \frac{b}{p+a} x_2.$$
(2.77)

Перехідна функція ланки, рис. 2.30, визначається виразом

$$h(t) = K(1 - e^{\uparrow}(-t/T)\ ),$$
(2.78)

а статична характеристика –

$$x_1 = Kx_2.$$
(2.79)

Прикладами аперіодичних ланок можуть бути підсилювачі потужності, теплові процеси, процеси розгону двигуна, *RC* - ланцюги *LR* – ланцюги.

Інтегруюча ланка. Ця ланка, рис. 2.31, описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_1 = Kx_2$$
(2.80)

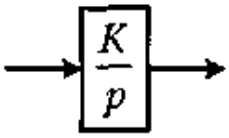


Рис. 2.31. Схема інтегруючої ланки

або, у операторній формі –

$$x_1 = \frac{K}{p} x_2.$$
(2.81)

Перехідна функція інтегруючої ланки, рис. 2.32 –

$$h(t) = Kt.$$
(2.82)

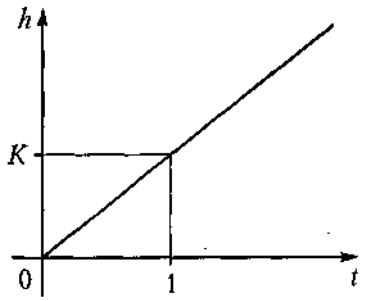


Рис. 2.32. Перехідна функція інтегруючої ланки

Ланка відноситься до астатичних блоків, тому не має статичної характеристики. Прикладом інтегруючих ланок можуть бути елементи механічних систем, які описуються рівняннями динаміки типу $\dot{V} = \frac{1}{m}F$ та кінематичними рівняннями $\dot{y} = V$, електронні інтегратори, та ін.

Диференціююча ланка (ідеальна). Ця ланка, рис. 2.33, описується диференціальним рівнянням

Рис. 2.33. Схема диференціюючої ланки

$x_1 = K\dot{x}_2,$
(2.83)

або у операторній формі –

$x_1 = Kpx_2.$
(2.84)

Перехідна функція диференціюючої ланки –

$h(t) = K\delta(t),$
(2.85)

а реакція ланки на лінійно зростаючий сигнал $x_2 = t$, рис. 2.34 –

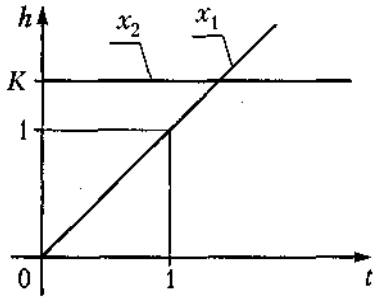


Рис. 2.34. Реакція диференціюючої ланки на лінійно зростаючу дію

Прикладом диференціюючої ланки може бути тахогенератори (електромашинні давачі швидкості), електронні диференціатори, та ін.

Реальна диференціюючи ланка. Ця ланка, рис. 2.35 описується рівнянням

$$Tx_1 + x_1 = Kx_2$$
(2.86)

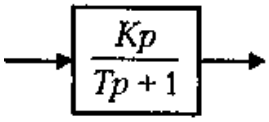


Рис. 2.35. Схема реальної диференціюючої ланки

або у операторній формі –

$$x_1 = \frac{Kp}{Tp+1}x_2.$$
(2.87)

Перехідна функція ланки, рис. 2.36, має вигляд

$$h(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}},$$
(2.88)

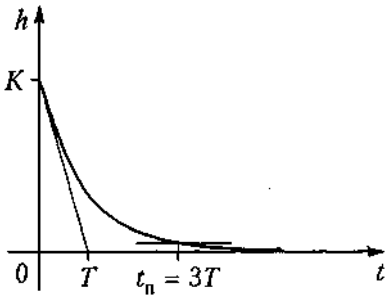


Рис. 2.36. Перехідна функція реальної диференціюючої ланки

а реакція ланки на лінійно зростаючий сигнал $x_1 = t$, рис. 2.37, співпадає з перехідною функцією аперіодичної ланки, тобто

$$x_1(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$
(2.89)

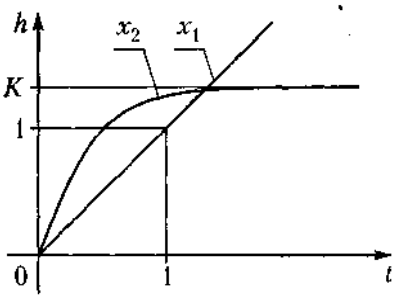


Рис. 2.37. Реакція реальної диференціюючої ланки на лінійно зростаючу дію

За умови x_2 = const та $t \to \infty$ виконується $x_1 = 0$, що відповідає статичній характеристиці ланки. За умови достатньо малих значень сталої часу T характеристики ланки до характеристик ідеальної диференціюючої ланки. Прикладом реальної диференціюючої ланки може бути *CR* - чи *RL* – ланки.

Коливальна ланка. Ця ланка, рис. 2.38, описується диференціальним рівнянням 2 – го порядку

$$T^2\ddot{x}_1 + 2\xi T\dot{x}_1 + x_1 = Kx_2,$$
(2.90)

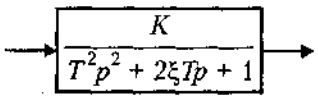


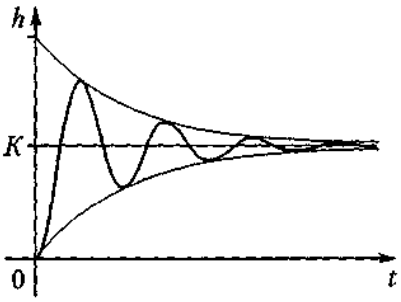
Рис. 2.38. Схема коливальної ланки

де $T > 0$ – стала часу, $\xi \in (0, 1)$ – параметр затухання, або операторним рівнянням, де передатна функція має вигляд

$$W(p) = \frac{K}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}.$$
(2.91)

Корені характеристичного рівняння приймають значення

Рис.2.39. Перехідна функція коливальної ланки



$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \alpha \pm j\omega,$$

де $\alpha = -\frac{\xi}{T}$, $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ - кутова частота коливань. Перехідна функція ланки, рис. 2.39, має вигляд

$$h(t) = K\left(1 - A_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_0)\right),$$
(2.92)

де $A_0 = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\omega^2}}$; $\varphi_0 = -arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$, а статична характеристика -

$$x_1 = Kx_2.$$
(2.93)

Прикладом коливальної ланки може бути маятникова система, *RLC* - ланка, і т.п.

Консервативна ланка (осцилятор). Ця ланка, рис. 2.40, описується диференціальним рівнянням

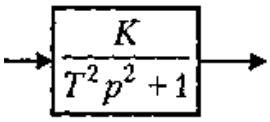


Рис. 2.40. Схема консервативної ланки (осцилятора)

$$T^2\ddot{x}_1 + x_1 = Kx_2$$
(2.94)

або операторним рівнянням

$$W(p) = \frac{K}{T^2p^2 + 1},$$
(2.95)

і отримується з коливальної ланки за умови ξ =0. Консервативна ланка має чисто уявні полюси

$$p_{1,2} = \pm j\frac{1}{T} = \pm j\omega$$

та перехідну функцію типу (рис. 2.41)

$$h(t) = K(1 - \cos[\omega t),]$$
(2.96)

де $\omega = \frac{1}{T}$. Ланка не має статичної характеристики.

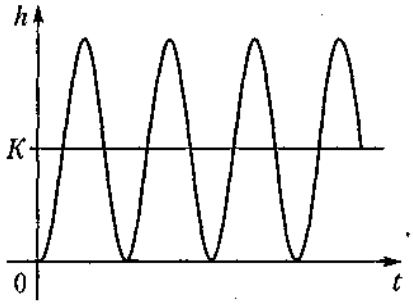


Рис. 2.41. Перехідна функція консервативної ланки

Прикладом консервативної ланки може бути маятник у вакуумі, ідеальні коливальні (*LC*) контури, та ін.

Подвійна аперіодична ланка. Ця ланка, рис. 2.42, описується рівнянням 2-го порядку

$$T^2\ddot{x}_1 + 2T\dot{x}_1 + x_1 = Kx_2$$
(2.97)

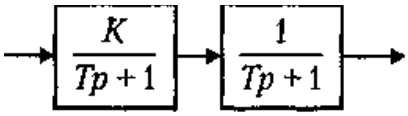


Рис. 2.42. Схема подвійної аперіодичної ланки

або операторним рівнянням

$$W(p) = \frac{1}{Tp+1} \cdot \frac{K}{Tp+2}.$$
(2.98)

Ланці відповідають однакові дійсні корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}$$

та перехідну функцію типу, рис. 2.43,

$$h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right).$$
(2.99)

Статична характеристика ланки

$$x_1 = Kx_2.$$
(2.100)

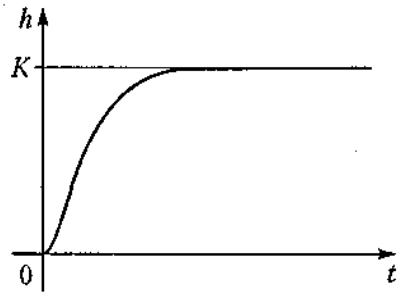


Рис. 2.43. Перехідна функція подвійної аперіодичної ланки

2.6. Побудова моделей вхід-вихід.

Модель вхід-вихід системи управління будується за відомими рівняннями окремих компонентів (блоків, ланок). Процес зводиться до перетворення системи диференціальних рівнянь, які описують поведінку окремих блоків, до єдиного рівняння системи типу (2.1), (2.3) чи (2.8). За цих умов поза залежністю від початкового опису найбільш зручною для здійснення таких перетворень є операторна форма (2.8), яка після закінчення процедури може бути приведена до типу (2.1) чи (2.3).

Розглянемо послідовне з’єднання блоків, рис. 2.44, тобто систему яка описується операторними рівняннями:

$$x_1 = W_1(p)x_2,$$
(2.101)
$$x_2 = W_2(p)x_3,$$
(2.102)

де, відповідно, $x_1 = x_1(t)$ – вихідний, а $x_3 = x_3(t)$ – вхідний сигнали системи.

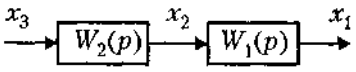


Рис. 2.44. Схема послідовного з'єднання блоків

Необхідно знайти єдиний опис системи (2.101)-(2.102), тобто рівняння зв'язку сигналів x_1, x_3. Підставивши (2.101) у (2.102), отримаємо

$x_1 = W_1(p)W_2(p)x_3.$
(2.103)
Тобто система описується рівнянням

$x_1 = W(p)x_3,$
(2.104)

де $W(p) = W_1(p)W_2(t)$ - передатна функція системи послідовно з'єднаних блоків.

Приклад. Розглянемо послідовне з'єднання аперіодичної ланки з одиничним коефіцієнтом передачі, та ідеальної диференціюючої ланки, рис. 2.45.

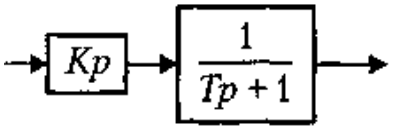


Рис. 2.45. Схема послідовного з'єднання аперіодичної ланки та ідеальної диференціюючої ланки

Застосування розглянутого вище правила дає наступну передатну функцію $W(p) = \frac{Kp}{Tp+1}$, яка співпадає з передатною функцією реальної диференціюючої ланки.

Розглянемо паралельне з'єднання тих же блоків, рис 2.46, тобто систему, яка описується рівняннями

$x_1 = x_2 + x_3,$
(2.105)
$x_2 = W_1(p)x_4,$
(2.106)
$x_3 = W_2(p)x_4,$
(2.107)

де $x_1 = x_1(t)$ - вихідний, а $x_4 = x_4(t)$ - вхідний сигнал системи. Після відповідних підстановок знаходимо зв'язок виходу та входу:

$x_1 = (W_1(p) + W_2(p))x_4,$
(2.108)

або

$x_1 = W(p)x_4,$
(2.109)

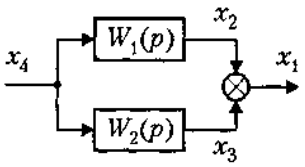


Рис. 2.46. Схема паралельного з'єднання блоків

де $W(p) = W_1(p) + W_2(p)$ - передатна функція паралельного з'єднання блоків.

Приклад. Розглянемо ізодром – паралельне з'єднання пропорційної та інтегруючої ланок, чи ПІ – регулятор. Використовуючи отримане вище правило, знаходимо передатну функцію ланки:

$$W(p) = \frac{k_P p + k_I}{p}.$$
(2.110)

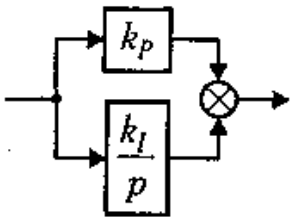


Рис. 2.47. Схема паралельного з'єднання пропорційної та інтегруючої ланок

Розглянемо систему, складену з двох блоків, один з яких підключений до другого у вигляді зворотного зв'язку, рис. 2.48, тобто

$x_1 = W_1(p)x_2,$
(2.111)
$x_3 = W_2(p)x_1,$
(2.112)

$x_2 = x_4 - x_3,$
(2.113)

де $x_1 = x_1(t)$ – вихідний, а $x_4 = x_4(t)$ – вхідний сигнал системи. Після елементарних перетворень матимемо

$$x_1 = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} x_4.$$
(2.114)

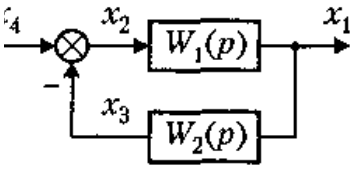


Рис. 2.48. Підключення до зворотного зв’язку

Тобто система описується рівнянням типу (2.114) і має передатну функцію

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$
(2.115)

Передатні функції систем управління. Розглянемо систему управління без зворотного зв’язку – розімкнену систему, яка складається з послідовно з’єднаних регулятора та об’єкту управління, рис. 2.49).

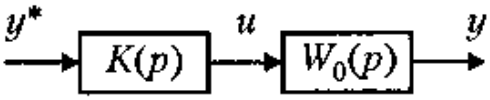


Рис. 2.49. Розімкнена система

Нехай об’єкт управління описується операторним рівнянням

$y(t) = W_0(p)u(t),$
(2.116)

а регулятор представлений виразом

$u(t) = K(p)y^*(p),$
(2.117)

де $y(t)$ – вихідна змінна, $u(t)$ – керуюча дія, $y^*(t)$ – задаюча дія (вхід системи), $W_0(p), K(p)$ – передатні функції – інтегро-диференціальні

оператори. Використовуючи правило побудови моделі послідовно з'єднаних блоків, знаходимо рівняння

$$y(t) = W(p)y^*(t),$$
(2.118)

Яке пов'язує вихідну змінну $y(t)$ та вхідну змінну $y^*(t)$ через передатну функцію розімкненої системи

$$W(p) = W_0(p)K(p).$$
(2.119)

Цю передатну функцію можна записати у вигляді

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)},$$
(2.120)

де $a(p), b(p)$ - диференціальні оператори відповідних ступенів. Тоді рівняння (2.118) можна привести до вигляду

$$a(p)y(t) = b(p)y^*(t)$$
(2.121)

а, за необхідності, переписати у стандартній формі (2.1).

Розглянемо замкнену систему управління, рис. 2.50, тобто систему представлену об'єктом управління (2.116) та регулятором відхилення:

$$u(t) = K(p)\varepsilon(t),$$
(2.122)

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t),$$
(2.123)

де ε - розузгодження (відхилення). Використовуючи правило (2.119), знаходимо модель замкненої системи у вигляді

$$y(t) = \Phi(p)y^*(t),$$
(2.124)

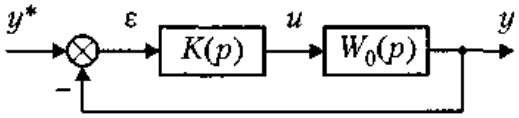


Рис. 2.50. Замкнута система

де $\Phi(p)$ - передатна функція замкнутої системи, яка визначається за формулою

(2.125)

Враховуючи (2.119) можна отримати

(2.126)

Порівняння останнього виразу з (2.115) свідчить, що замкнуті системи приводять до зміни знаменника її передатної функції – характеристичного поліному системи, тобто коренів поліному (полюсів системи).

3. Математичні моделі типу вхід-стан-вихід

Розглянемо неперервні лінійні моделі, які описують зв'язки входів та виходів керованого об'єкта (динамічної системи) у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку з використанням проміжних змінних – **змінних стану**. Такий спосіб опису є ключовою особливістю методу простору станів. Цей метод надає великі можливості формалізації процедур аналізу, синтезу та автоматизації проектування, тому він займає чільне місце у сучасній теорії лінійних систем.

3.1. Поняття простору станів та моделі типу стан-вихід

Розглянемо автономну динамічну систему (2.2) з входом $y(t), t > t_0$, рис. 3.1. Для автономної системи розв'язок $y = y(t)$ містить тільки вільну складову.

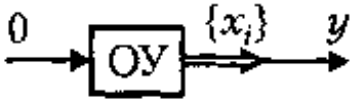


Рис. 3.1.Схема автономної динамічної системи

Введемо змінні

$x_i = x_i(t),$
(3.1)

визначені при $t > t_0$, такі, що мають початкові значення $x_{i0} = x_i(t_0)$.

Означення. Змінними стану автономної динамічної системи з виходом y називаються незалежні змінні $x_i(t)$ такі, що значення вихідної змінної $y(t)$ у довільний момент часу $t = t_i \geq t_0$ однозначно визначаються числами $x_{i0} = x_i(t)$.

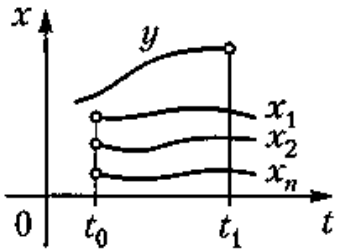


Рис. 3.2. Графічне зображення стану системи

Стан системи в момент часу $t_i \geq t_0$ характеризується повним набором змінним стану $x_i(t)$, а початковий стан – числами x_{i0}. Згідно з означенням, знаючи початковий стан системи, можна однозначно знайти значення вихідної змінної y в будь-який момент часу $t_i \geq t_0$:

$y(t_1) = y(t_1, x_{10}, x_{20}, \ldots).$
(3.2)

Процес знаходження значень певної функції для майбутніх моментів часу називається прогнозуванням, чи передбаченням. Можливість передбачення є природною вимогою якісного управління, що визначає важливість введеного поняття для розглядуваних далі неавтономних (керованих) систем. Особливістю змінних стану є те, що для передбачення поведінки системи у будь-який момент часу $t > t_0$ (та управління неавтономною системою) достатньо інформації про змінні стану у момент t_0 і не потрібні знання передісторії процесів, тобто інформації про функції $x_i(t)$ за умови $t < t_0$. Останнє є підставою для побудови процедур (алгоритмів) прогнозування, та алгоритмів управління динамічними системами за поточними значеннями змінних стану. З іншого боку, для неавтономних систем з використанням змінних стану встановлюється однозначна відповідність між вхідними та вихідними діями. Як змінні стану автономної системи можна вибрати, наприклад, фазові змінні, тобто вихідна змінна системи y(t) та її похідні до $(n-1)$ го порядку включно: $y^{(i)}(t), n = \overline{1, n-1}.$ Розглянемо змінні

$x_i(t) = y^{(i-1)}(t), \qquad i = \overline{1, n}$
(3.3)

з початковими значеннями

$x_{i0} = x_i(0) = y^{(i-1)}(0).$

Вихід стаціонарної автономної системи (2.2), тобто вільна складова процесу за умови $t \geq t_0 = 0,$ для випадку нерівних коренів характеристичного рівняння визначається формулою

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\mu_i t},$$
(3.4)

де коефіцієнти C_i залежать від початкових значень вихідної змінної та її похідних, або з врахуванням введених позначень:

$C_i = C_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}).$

Тобто поведінка розглядуваної системи за умови $t \geq 0$ однозначно визначається початковими значеннями змінних x_i і, відповідно, за означенням ці змінні є змінними стану. Загальна чисельність змінних стану дорівнює $n,$ тобто дорівнює порядкові диференціального рівняння (2.2). Лінійні комбінації та інші функції від змінних x_i, доповнювані до вже вибраного набору, не є змінними стану, оскільки не відповідають умові незалежності. Враховуючи введені позначення, перетворимо рівняння (2.2) до нормальної форми Коші. Диференціюючи за часом рівняння (3.3) і підставляючи у отримані вирази (3.3), (3.2), знаходимо рівняння стану автономної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_n x_n. \end{cases}$$
(3.5)

Вихідна змінна $y(t)$ пов’язана із змінними стану тривіальним виразом – найпростішим рівнянням виходу

$y = x_1.$
(3.6)

Рівняння стану (3.5) та виходу (3.6) є найпростішим прикладом моделі стан-вихід.

В загальному випадку рівняння стану автономної системи також представляється системою однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \quad \cdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \qquad (3.7)$$

де $t \geq t_0$, $x_i(t_0) = x_{i0}$, $a_{ij} -$ сталі чи залежні від часу дійсні коефіцієнти (параметри), а рівняння виходу, які пов'язують вихідну змінну системи $y(t)$ із змінними $x_i(t)$, має вигляд

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t), \qquad (3.8)$$

де $c_i -$ коефіцієнти (параметри). Можна показати, що змінні $x_i(t)$ є змінними стану, тому рівняння (3.7), (3.8) є найбільш загальна модель стан-вихід лінійної автономної динамічної системи з одним виходом.

Вектор $x = x(t)$, рис. 3.3, з розмірністю n, елементами якого є змінні стану $x_i = x_i(t)$, тобто $x = \{x_i\} = |x_1, x_2, \ldots, x_n|^T$ називається вектором стану. Вектор x є елементом n - вимірного лінійного (векторного) простору $\mathbf{R}^n$, яке називається простором станів: $x \in \mathbf{R}^n$. Рівняння (3.7), (3.8) можна записати у векторно-матричній форм:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad (3.9)$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t), \qquad (3.10)$$

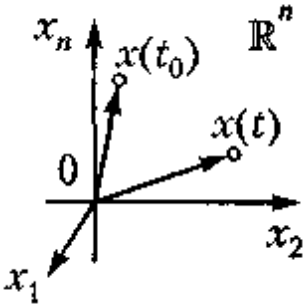


Рис. 3.3. Ілюстрація векторів $x = x(t)$, $x(t_0)$

де $x(t_0) = x_0 = \{x_{i0}\}$ вектор початкових станів (початкових умов),

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- матриця системи $n \times n$,

$C = \{c_i\} = |c_1, c_2, \dots, c_n|$

- матриця розміру $1 \times n$. В окремому випадку, коли рівняння моделі представлені у вигляді (3.5), (3.6), отримуємо

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \quad C = |1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|.$$

Розв'язком системи (3.7) з початковими умовами $x_i(t_0) = x_{i0}$ називається набір функцій

$$x_i(t) = x_i(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}).$$
(3.11)

які за умови $t = t_0$ задовольняють початковим умовам, а для будь-яких $t \geq t_0$ – рівнянням (3.7). Розв'язком системи (3.9) буде вектор-функція

$$x(t) = x(t, x_0, t_0).$$
(3.12)

Розв'язок можна представити у формі

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0,$$
(3.13)

де $\Phi(t, t_0)$ - фундаментальна (перехідна) матриця системи (3.9). Підставляючи (3.13) у рівняння виходу (3.10), отримаємо вираз для розрахунку вихідної змінної

$$y(t) = C\,\Phi(t, t_0)x_0.$$
(3.14)

Для розглянутих далі стаціонарних систем перехідна матриця знаходиться наступним чином

(3.15)

Поклавши $t_0 = 0$, отримуємо:

$$x(t) = e^{A(t)} x_0$$
(3.16)

та

$$y(t) = C e^{A(t)} x_0.$$
(3.17)

Аналіз рівнянь (3.13), (3.14) та (3.16), (3.17) показує: змінні $x_i(t)$ та вихідна $y(t)$ у будь-який момент часу $t > t_0$ однозначно визначається n початковими значеннями x_{i0} та, відповідно, за означенням змінні x_i змінними стану; передісторія системи (рух за умови $t < t_0$) не впливає на її поведінку за $t \geq t_0$

умови . Якщо для деяких початкових умов та будь-яких $t \geq t_0$ має місце тотожність

$$x(t) = x^*,$$
(3.18)

де $x^* = const,$ то значення $x = x^*$ називається рівноважним станом, чи положенням рівноваги, автономної системи (3.9). У рівноважному стані має місце

$$x^* = 0,$$
(3.19)

тобто

$$Ax^* = 0.$$
(3.20)

За умови det *A*=0 існують нетривіальні множини рівноважних станів (прямі або площини), тобто підпростори, які задовольняють рівняння (3.20). Після підстановки $x^* = 0$ у рівняння виходу (3.10) знаходимо рівноважне значення вихідної змінної

$$y^* = 0.$$

Формули (3.16), (3.17) визначають перехідні процеси системи - n функцій часу $x_i(t)$. Графічно їх можна представити у вигляді: часових діаграм; фазових траєкторій, рис. 3.4.

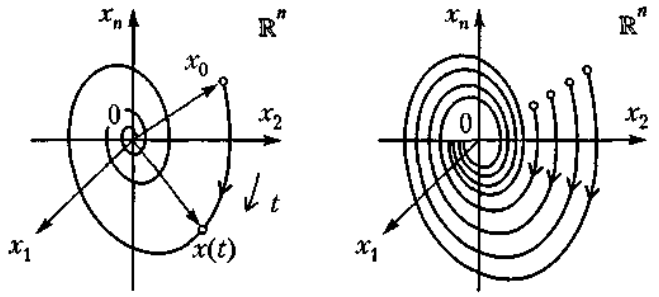


Рис. 3.4. Інтегральна крива у $\mathbf{R}^n$ та фазовий портрет

Фазовою траєкторією, або інтегральною кривою у $\mathbf{R}^n$, називається лінія, яка описується вектором стану x у просторі станів $\mathbf{R}^n$ за умови зміни змінної $t \in [t_0, t_f)$, $t_f > t_0$, тобто годограф вектор-функції $x(x_0, t)$ за параметром t. Фазовий портрет – це множина фазових траєкторій, які відповідають різним значенням початкових умов x_0, рис. 3.4. Введені поняття узагальнюються на клас багатоканальних (многозв'язних) систем, які характеризуються кількома вихідними змінними y_j, $j = \overline{1,m}$. Загальна модель багатоканальної системи включає рівняння стану (3.7) та m рівнянь виходу

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \cdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases}$$
(3.21)

де c_{ji} - дійсні коефіцієнти (параметри). Визначимо m - вимірний вектор виходу

$$y = |y_1, y_2, \ldots, y_m|^T$$
(3.22)

Як вектор простору вихідних змінних $\mathbf{R}^m$ і запишемо рівняння (3.21) у компактній векторно-матричній формі

$$y = Cx,$$
(3.23)

де $C = \{c_{ij}\}$ - матриця розміру $m \times n$. Таким чином, модель стан-вихід багатоканальної системи представлена рівняннями (3.7), (3.21) або векторно-матричними рівняннями (3.9) та (3.23).

Властивості моделей стан-вихід. Проведемо аналіз моделей (3.9), (3.10) та пов'язані ними розв'язки – перехідні процеси (3.16), (3.17). Для цього визначимо наступні алгебраїчні об'єкти:

- характеристичний поліном матриці стану A:

  $$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_n;$$
  (3.24)

- власні значення (власні числа) матриці A як n чисел $\lambda_i(A)$, що є коренями поліному (3.24);
- власні вектори матриці $\tau_i\{A\}$;

а також (для випадку дійсних власних чисел $\lambda_i \neq \lambda_j$) – власні підпростори як множини (прямі, площини та ін.), рис. 3.5:

$$R_i = \{x \in \mathbf{R}^n : x = \lambda \tau_i\},$$
(3.25)

де λ - дійсні числа. У розглядуваному випадку власні вектори задовольняють рівняння

$$A\tau_i = \lambda_i \tau_i,$$
(3.26)

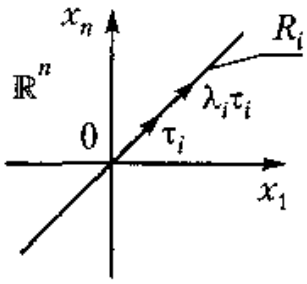


Рис. 3.5. Ілюстрація власних векторів та власних чисел

Розглянемо діагональну матрицю

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

а з виразу (3.26) знайдемо:

$$A|\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n| = |\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n|\Lambda.$$
(3.27)

Вираз (3.27) встановлює зв'язок матриці системи A з діагональною матрицею Λ. Квадратна матриця

$$T = |\tau_1\ \tau_2 \dots \tau_n|,$$

яка називається матрицею подібності, у даному випадку дійсних коренів не вироджена, тобто виконується наступна Властивість 1.

Властивість 1. Матриця A (невироджена) приводиться до діагональної форми

$$\Lambda = T^{-1}AT.$$
(3.28)

В загальному випадку матриця A приводиться до жорданової (блочно-діагональної) форми, тобто існує невироджена матриця перетворення T така, що

$$J = T^{-1}AT.$$
(3.29)

Тут J - жорданова матриця:

$$J = \begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{vmatrix},$$

а для пари комплексно-спряжених коренів $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ – матрицями типу

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{vmatrix}.$$

Матрична функція

$$\exp(At) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{i!}A^it^i + \cdots \qquad (3.30)$$

називається матричною експонентою. Матрична експонента діагональної матриці A розраховується за формулою

$$e^{\Lambda t} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}.$$

У більш загальному випадку (випадок некратних дійсних коренів) з виразу (3.28) маємо:

$$A = Te^{\Lambda t}T^{-1}, \qquad (3.31)$$

і використовуючи означення матричної експоненти (3.30), маємо Властивість 2.

Властивість 2.

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}e^{\Lambda t}T^{-1}. \qquad (3.32)$$

Знайдемо власні числа z_i матриці e^{At}, тобто корені характеристичного рівняння

$$\det[(zI -]e^{At}) = 0.$$

Враховуючи (3.32) маємо

$$T^{-1}.$$

$$zI - e^{At} = T\,(zI - e^{\Lambda t}) \qquad (3.33)$$

Оскільки $\det[(zI -]e^{At}) = \prod_{1}^{n} [(z -]e^{\lambda_i t})$, то з виразу (3.33) випливає, що шукані власні числа z_i задовольняють рівняння

$$\prod_{1}^{n}\left[(z-]e^{\lambda_i t}\right) = 0,$$

звідки випливає Властивість 3.

Властивість 3.

$$z_i = \lambda_i\left\{e^{\Lambda t}\right\} = e^{\lambda_i t}, i = \overline{1, \mathbf{n}}.$$

(3.34)

З врахуванням Властивості 2 можна отримати розв'язок системи рівнянь (3.9), (3.10). Для розрахунку вектора стану (3.16) у потрібному вигляді запишемо

$$x(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0 =$$

$$= |\tau_1\ \tau_2 \dots \tau_n| \cdot \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ \vdots \\ m_n^T \end{vmatrix} \cdot x_0. \qquad (3.35)$$

Враховуючи, що $T^{-1}T = I$, запишемо

$$\begin{vmatrix} m_1^T T_1 & m_1^T T_2 & \dots & m_1^T T_n \\ m_2^T T_1 & m_2^T T_2 & \dots & m_2^T T_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_n^T T_1 & m_n^T T_2 & \dots & m_n^T T_n \end{vmatrix} = I,$$

це означає, що

$$m_i^T T_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тоді рівняння (3.35) матиме вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i^T x_0 e^{\lambda_i t} \tau_i.$$

(3.36)

Введемо позначення

$m_i^T x_0 = \mu_i(x_0).$
(3.37)

і отримаємо розв'язок системи (3.9) у вигляді розкладу за власними векторами:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_0) e^{\lambda_i t} \tau_i. \qquad (3.38)$$

Вектори $x^i(t)$ належать власним підпросторам R_i і називаються власними складовими розв'язку $x(t)$, або модами вектора стану системи.

Властивість 4. Полюси системи p_i співпадають з власними числами матриці системи A, тобто

$p_i = \lambda_i\{A\}, \qquad i = \overline{1,n}.$
(3.39)

Властивість 5.

$a(\lambda) = \det(\lambda I - A).$
(3.40)

3.2. Моделі керованих систем

Зв'язок між вхідною дією динамічної системи та її вихідною змінною неоднозначний, тобто одному і тому ж вхідному сигналу $u(t)$ може відповідати множина вихідних сигналів $y(t)$. Введення до розгляду змінних стану x_i дає змогу усунути вказану неоднозначність – вихід системи в довільний момент часу $t_1 \geq t_0$ однозначно визначається початковим значенням змінних стану x_{i0} та заданою на інтервалі часу $[t_0, t_1]$ вхідною дією $u = u_{[t_0,t_1]}$:

$y(t_1) = y(t_1, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_{[t_0,t_1]}).$
(3.41)

Моделі вхід-стан-вихід. Розглянемо окремий випадок керованої динамічної системи з одним входом $u(t)$ та одним виходом $y(t)$, яка описується рівнянням (2.10), де $a_0 = 1$, рис. 3.6.

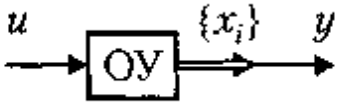


Рис. 3.6. Динамічна система з одним входом та одним виходом

Розглянемо змінні стану (3.3), диференціюючи відповідні функції і підставляючи (2.10), знаходимо рівняння стану:

$\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_3,$
……
(3.42)
$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + bu.$

Причому рівняння виходу має вигляд (3.6). Рівняння (3.42) та (3.6) є найпростішими на випадок моделі вхід-стан-вихід (ВСВ). У більш загальному випадку модель ВСВ керованої динамічної системи (2.1) містить рівняння стану типу

$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + b_1 u,$
$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + b_2 u,$
(3.43)
……..
$\dot{x}_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n + b_n u$

та рівнянням виходу
$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t),$ (3.44)

де a_{ij}, b_i, c_i - дійсні коефіцієнти (параметри). Для перетворення до компактної векторно-матричної форми слід визначити вектор стану $x = \{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$, матриці $A = \{a_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$, а також матрицю з розміром $n \times 1$

$B = \{b_i\} = |b_1, b_2, \ldots, b_n|^T.$

Тоді рівняння (3.43), (3.44), які описують модель вхід-стан-вихід, матимуть вигляд:

$\dot{x} = Ax + Bu,$
(3.45)
$y = Cx,$
(3.46)

де $x(0) = x_0$. Модель (3.45), (3.46) пов'язує вхід $u(t)$ та вихід $y(t)$ через вектор проміжних змінних $x_i(t)$. В окремому випадку, коли модель ВСВ представлена у формі (3.42), (3.6), отримуємо матриці

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{vmatrix}, B = |0\ 0 \dots 0\ b|^T, C = |1\ 0 \dots 0\ 0|.$$

Аналогічно визначається модель ВСВ багатоканальної (багатозв'язної) системи. У загальному випадку вона містить рівняння стану типу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m'}u_{m'}, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m'}u_{m'}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm'}u_{m'} \end{aligned} \qquad (3.47)$$

та рівняння виходів (3.21). Визначимо m' - мірний вектор управління $u = \{u_j\}$, $j = \overline{1,m'}$, та m - мірний вектор виходів $y = \{y_j\}, j = \overline{1,m}$, а також матриці $B = \{b_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$ розміру $n \times m'$ та $m \times n$ відповідно. Тоді рівняння (3.47) та (3.21) можна переписати у вигляді (3.45) та (3.46).

Розглянемо збурену динамічну систему, тобто керовану систему, на вхід якої додатково діє вхідний сигнал (збурюючи дія) $f(t)$, рис. 3.7.

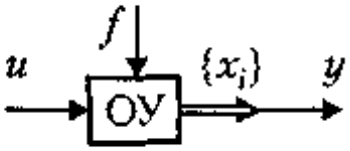


Рис. 3.7. Схема збуреної динамічної системи

Рівняння стану такої системи має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n + b_1u + d_1f, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n + b_2u + d_2f, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n + b_nu + d_nf, \end{aligned} \qquad (3.47)$$

де $i = \overline{1,n}$) – коефіцієнти, а рівняння виходу збереже форму (3.44). Векторно-матрична форма моделі (3.47), (3.44) має вигляд:

$\dot{x} = Ax + Bu + Df,$
(3.48)
$y = Cx,$
(3.49)

де $D = \{d_i\}, i = \overline{1,n}$.

Якщо на вхід системи діє декілька збурюючих дій f_j, $j = \overline{1,k}$, то у рівнянні (3.48) $f = \{f_j\}$ - вектор збурень, а $D = \{D_{ij}\}$. У окремому випадку, коли модель типу вхід-вихід (ВВ) має вигляд (2.31), а рівняння стану збуреної системи будуть такими

$\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_3,$
(3.50)
……
$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + bu + df,$

а у рівнянні (3.48) –

$D = |0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; d|^T.$

Розглянемо розв'язки рівнянь (3.48), (3.49), покладемо $t_0 = 0$. Розв'язок рівняння стану (3.48) можна подати у вигляді:

(3.51)

де - вільна складова перехідного процесу автономної системи, яка відповідає розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння (3.9), і залежить від початкової умови x_0, $x_B(t)$ – вимушена складова, яка відповідає перехідному процесу системи (3.48) за нульових початкових умов $x_0 = 0$ - як реакція системи на вихідну дію $u(t)$. Підставляючи (3.51) у рівняння виходу (3.49), отримаємо

(3.52)

Матриця типу

$w(t) = Ce^{At}B$
(3.53)

є ваговою (імпульсною перехідною) матрицею, за умови $m = m' = 1$ – вагова функція, тобто рівняння

$$y_0 = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
(3.54)

співпадає з наведеним раніше виразом (2.56). Для збурених моделей ВСВ розв'язки аналогічні.

Передатна функція (матриця) та структурні схеми моделей ВСВ. Подані вище рівняння, які описують моделі вхід-стан-вихід, можна записати у операторній формі. Розглянемо рівняння (3.45), (3.46), використовуючи оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$, запишемо $\dot{x} = px$. Тоді з рівняння стану (3.45) після найпростіших алгебраїчних перетворень маємо

$$x = (pI - A)^{-1}Bu.$$
(3.55)

Підставивши останній вираз у рівняння виходу (3.46), отримаємо

$$y = C(pI - A)^{-1}Bu.$$
(3.56)

Введемо позначення

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$
(3.57)

і запишемо рівняння (3.56) у вигляді

$$y = W(p)u.$$
(3.58)

Порівняння з рівнянням (2.27) показує, що матричний інтегрально-диференціальний оператор $W(p)$ є передатною матрицею керованої динамічної системи. Розглянемо властивості оператора (3.57). Матрицю $(pI - A)^{-1}$, яка називається резольвентою, на основі матричної алгебри, можна представити у вигляді:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj\,(pI - A)}{\det(pI - A)} = \frac{p^{n-1} + R_1 p^{n-2} + \cdots + R_n}{\det(pI - A)},$$
(3.59)

де R_i – визначник матриці $n \times n$. Тоді

$$W(p) = \frac{B_1 p^{n-1} + \cdots + B_n}{\det(pI - A)} = \frac{B(p)}{\det(pI - A)},$$
(3.60)

де $B_i = CR_iB$; $B(p)$ - матричний оператор. Для випадку одно канальної системи ($m = m^{\text{т}} = 1$) $W(p)$ передатна функція, порівнюючи (3.59) з (2.9), знайдемо, що

$$\det(pI - A) = a(p)$$
(3.61)

- характеристичний поліном системи; $B(p) = b(p)$ характеристичний поліном правої частини диференціального рівняння (2.1). З (3.61) випливає властивість 4 (формула (3.39)) – власні числа матриці A співпадають з коренями характеристичного рівняння (полюсами) системи: $\lambda_i\{A\} = p_i$. Для побудови структурної схеми, яка відповідає моделі ВСВ, перепишемо рівняння стану (3.45) у операторній формі

$$x = \frac{1}{p(Ax + Bu)}$$
(3.62)

та скористаємося рівнянням виходу (3.46): $y = Cx$. Структурна схема системи приймає вигляд, поданий на рис. 3.8.

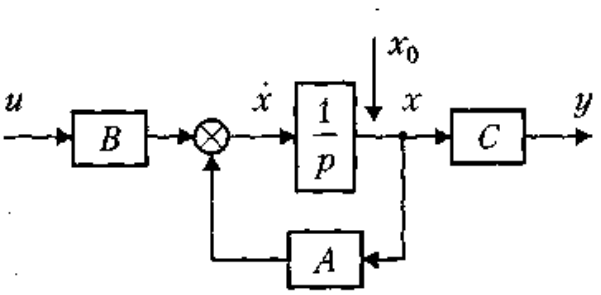


Рис. 3.8. Структурна схема моделі ВСВ

У окремому випадку, коли рівняння стану записані у формі (3.42), (3.6), матимемо

$$x_1 = \frac{1}{p}x_2, \qquad x_2 = \frac{1}{p}x_3, \ldots, x_{n-1} = \frac{1}{p}x_n,$$
$$x_n = \frac{1}{p}(-a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + bu).$$

Структурна схема, рис. 3.9) практично співпадає з канонічно керованою формою подання лінійних систем.

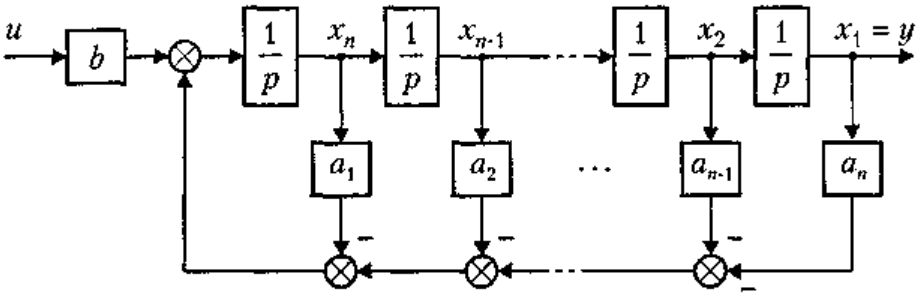


Рис. 3.9. Структурна схема моделі ВСВ (окремий випадок)

Приклад. Розглянемо систему другого порядку ($n = 2$), модель ВВ якої подана рівнянням

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu.$$
(3.63)

Змінні стану визначаються виразами

$$x_1 = y, \qquad x_2 = \dot{y},$$
(3.64)

а модель ВСВ знаходиться у формі

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + bu, y = x_1. \qquad (3.65)$$

Векторно-матрична форма моделі має вигляд

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u, \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x,$$
(3.66)

Приклад. Модель ВВ нагрівальної печі, RC – ланки та розгону електродвигуна, рис. 3.10, описується диференціальним рівнянням

$$Tx(t) + x(t) = Ku(t),$$

де u - вхідна дія (напруга), x - вихідний сигнал (температура, вихідна напруга чи кутова швидкість, відповідно).

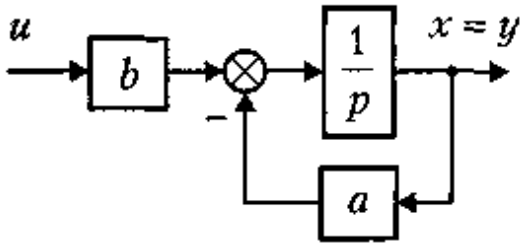


Рис. 3.10. Схема моделі ВВ нагрівальної печі

Модель ВСВ має вигляд

$\dot{x} = -ax + bu,$
(3.67)
$y = x,$
(3.68)

де $a = \frac{1}{T}, \qquad b = \frac{K}{T}.$

Приклад. Модель руху (обертання) електродвигуна описується рівнянням другого порядку

$T\ddot{y} + \dot{y} + Ku,$

де $y = \alpha$ - кут повороту. Введемо змінні стану (3.64), де $x_2 = \omega = \dot{a}$ - кутова швидкість обертання, знаходимо модель ВСВ у вигляді

$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -ax_2 + bu, \qquad y = x_1.$
(3.69)

Векторно-матрична форма моделі має вигляд

$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u, \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x.$
(3.70)

Це окремий випадок раніше отриманої моделі (3.66).
Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$a_0\ddot{y} = u,$

яке описує рух матеріальної точки чи обертання кінематичного механізму. Воно приводиться до вигляду

$\ddot{y} = bu,$

де $b = \frac{1}{a_0}$. Введемо змінні стану (3.64), і знайдемо модель ВСВ у вигляді

$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = bu, y = x_1.$
(3.71)

Векторно-матрична форма моделі має вигляд

$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u$, $y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x.$

Це окремий випадок вже розглянутої моделі (3.66).

За умови дії сили опору f (збурення) рівняння руху (модель ВСВ) має вигляд

$\ddot{y} = bu + df.$

У цьому випадку модель ВСВ знаходиться у вигляді

$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = bu + df, \qquad y = x_1.$
(3.72)

або

$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} 0 \\ d \end{vmatrix}, y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x.$

Статичний режим. Розглянемо модель ВСВ за умови сталої вхідної (керуючої) дії, $u \equiv const.$ У цьому випадку розв'язок диференціального рівняння (3.9), який відповідає усталеній складовій перехідного процесу, знаходиться у вигляді $x = x_y \equiv const$. Оскільки $\dot{x}_y = 0,$ знаходимо:

$Ax_y + Bu.$
(3.73)

За умови $\det A \neq 0$ $(\lambda_i\{A\} \neq 0),$ алгебраїчне рівняння (3.73) має єдиний розв'язок:

$x_y = -A^{-1}Bu.$
(3.74)

Підставимо знайдений розв'язок у рівняння виходу (3.49), знаходимо статичну характеристику системи (3.9), (3.49)

$$y_y = -CA^{-1}Bu \,.$$
(3.75)

З врахуванням (2.68) можна записати

$$-CA^{-1}B = W(0)$$
(3.75)

і отримати вираз типу (2.68). Якщо система така, що $\det A = 0,$ то матриця A є не оберненою, і система не має статичного режиму.

3.3. Фазові траєкторії автономної системи другого порядку

Розглянемо автономну систему другого порядку:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0$$
(3.76)

з початковими значеннями $y_0,$ $\dot{y}_0.$ Характеристичне рівняння системи

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$
(3.77)

має два дійсних чи комплексно-спряжених корені – полюси системи

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$
(3.78)

розташування яких на комплексній площині визначає тип перехідних процесів

$$y(t, y_0, \dot{y}_0)$$
(3.79)

та динамічні властивості системи.

Введемо змінні стану як фазові змінні: $x_1 = y,$ $x_2 = \dot{y}.$ Модель стан-вихід приймає вигляд (рис. 3.11)

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
(3.80)

$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2,$
(3.81)
$y = x_1$
(3.82)

з початковими значеннями $x_1 = y_0,$ $x_{20} = \dot{y}_0.$ Власні числа матриці A системи

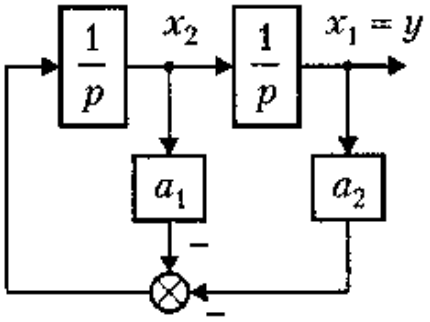


Рис. 3.11. Схема автономної системи другого порядку

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix}$$

співпадають з коренями $p_{1,2}$ характеристичного рівняння (3.77). Власні вектори $\tau_{1,2}$ цієї системи другого порядку знаходяться, за умови дійсних значень її полюсів, з виразу

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix} \tau_{1,2} = p_{1,2}\tau_{1,2},$$

тобто
$$\tau_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 \\ p_{1,2} \end{vmatrix}.$$

і відповідні власні підпростори $R_{1,2}$ представлені прямими

$x_2 = p_{1,2} x_1.$
(3.83)

Рівноважні , усталені, стани (x_1^*, x_2^*) системи (3.80)-(3.82) знаходяться з умови

$\dot{x}_1 = 0,$ $\dot{x}_2 = 0.$
(3.84)

За умови $a_2 \neq 0$ отримуємо, що єдиним положенням рівноваги є початок координат

$x_1^* = 0, x_2^* = 0,$
(3.85)

а зо умови $a_2 = 0$ знаходимо множину рівноважних станів, що є прямою

$x_2 = 0.$
(3.86)

Фазовою (інтегральною) траєкторією цієї системи є годограф вектора станів $\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix}$ за умови зміни параметра t, а множина фазових траєкторій, отриманих для різних початкових умов, утворює її фазовий портрет. Фазові траєкторії можна отримати експериментально чи знайти аналітично. У останньому випадку використовується останній прийом. Рівняння (3.80), (3.81) записується у вигляді

$dx_1 = x_2 dt,$
$dx_2 = -(a_2 x_1 + a_1 x_2) dt.$

Після ділення другого виразу на перший отримуємо диференціальне рівняння

$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_2 x_1 + a_1 x_2}{x_2}.$
(3.87)

Розв’язок цього рівняння знаходиться у вигляді

$x_2 = \varphi_2(x_1)$
(3.88)

і визначає інтегральну, фазову, траєкторію розглянутої системи на площині $\mathbf{R}^2$. Розглянемо перехідні процеси, які відповідають різним значенням коренів характеристичного рівняння, полюсів системи (3.80), (3.81).

1. ***Для нерівних дійсних полюсів***, рис. (3.12)

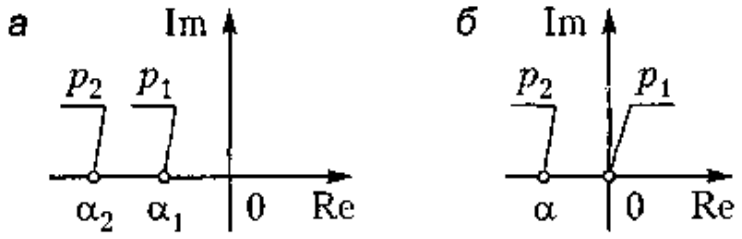


Рис. 3.12. Геометрична ілюстрація полюсів – нерівних дійсних величин

$$p_{1,2} = \alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$
(3.89)

рівняння (3.76) має розв'язок

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t},$$
(3.90)

що відповідає аперіодичному процесові. За умови $a_1 > 0$ та $a_2 > 0$

$$Re\, p_{1,2} = \alpha_{1,2} < 0$$

(рис. 3.12 а). У цьому випадку має місце затухаючий перехідний процес і виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} x = 0,$$
(3.91)

і фазові траєкторії системи за умови $t \to \infty$ сходиться до положення рівноваги 0 (рис. 3.13, а), яке називається стійким вузлом (система цього типу відноситься до класу асимптотично стійких систем).

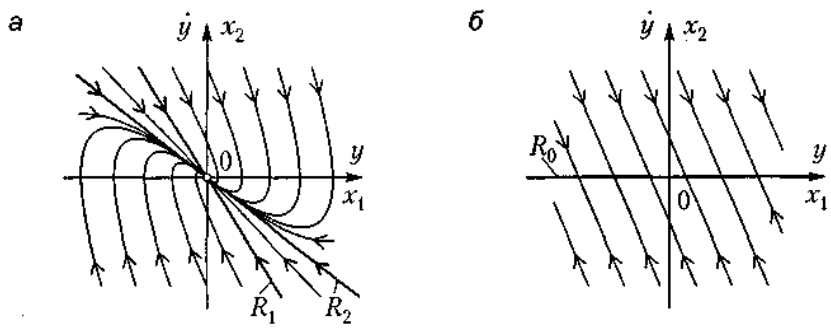


Рис. 3.13. Фазові траєкторії системи $[(a]_1 > 0, \quad a_2 > 0)$

Система має два власних інваріантних підпростори R_1, R_2, на яких розв'язок рівняння (3.76) записується у вигляді

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t}$$
(3.92)

чи

$$y = C_2 e^{\alpha_2 t}$$
(3.93)

відповідно, тобто динаміка на власних підпросторах відповідає поведінці системи першого порядку. За умови, що $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, маємо

$$Re\, p_1 = a < 0, \qquad p_2 = 0$$

(рис. 3.12, б). Фазові траєкторії системи (рис. 3.13, б) за умови $t \to \infty$ збігаються до множини рівноважних станів (прямої R_0), яка описується рівнянням (3.86). Ця ж множина є власним підпростором системи (такі системи відносяться до класу стійких за Ляпуновим, чи нейтрально стійких).

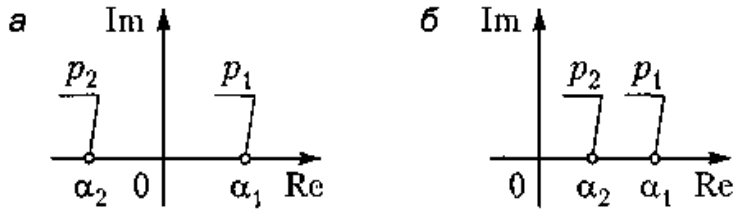
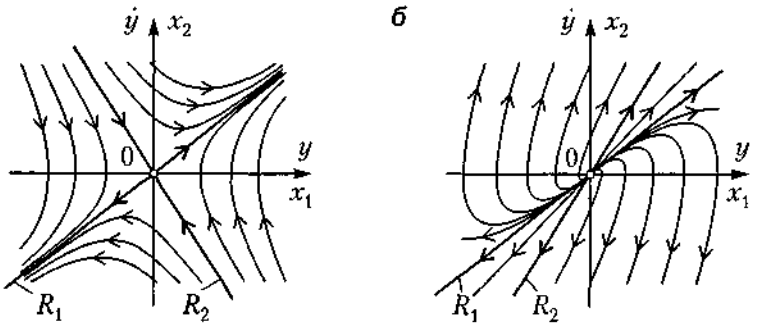


Рис. 3.14. Система з дійсними різними полюсами

За умови, що $a_1 < 0$, $a_2 > 0$,

$$Re\, p_1 = \alpha_1 > 0, \qquad Re\, p_2 = \alpha_2 < 0$$

(рис. 3.14. а). У цьому випадку має місце розбіжний перехідний процес. Фазові траєкторії системи за умови $t \to \infty$ розбіжні (рис. 3.15, а)



$[a_1 1 < 0, \qquad a_1 2 >$

Рис. 3.15. Фазові траєкторії системи)

$$\lim_{t \to \infty} |x| = \infty,$$
(3.93)

за виключенням траєкторій, які розпочинаються на прямій R_2, для яких виконується граничне співвідношення (3.91), системи такого типу відносяться до типу нестійких систем). Положення рівноваги, точка 0, називається сідловою точкою (сідлом). Система має два невласних інваріантних підпростори R_1, R_2 на яких розв'язки (3.76) записуються у вигляді (3.92) чи (3.93). За умови, що $a_1 < 0, \qquad a_2 < 0$

$$Re\, p_1 = \alpha_1 > 0, \qquad Re\, p_2 = \alpha_2 > 0$$

(рис. 3.14, б). У цьому випадку має місце розбіжний перехідний процес та всі фазові траєкторії (рис. 15, б) системи за умови $t \to \infty$ розбіжні і виконується (3.93). Положення рівноваги системи, точка 0, називається нестійким вузлом, система нестійка. Система також має два власних інваріантних підпростори R_1, R_2.

2. ***Для*** $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$, система має рівні дійсні полюси (рис. 3.16)

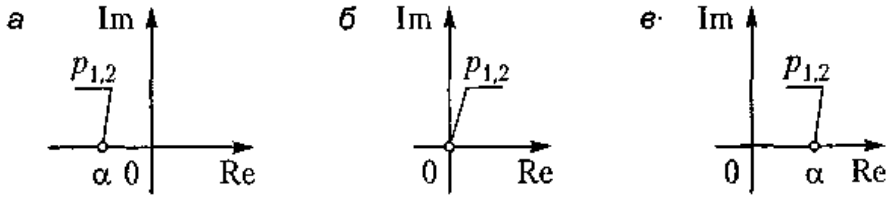


Рис. 3.16. Система з дійсними рівними полюсами

$$p_{1,2} = \alpha = -\frac{a_1}{2}.$$

Розв’язок рівняння (3.76) має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t},$$

і відповідає аперіодичному процесові. За умови $\alpha_2 > 0, (\alpha)_1 > 0)$,

$$Re\, p_{1,2} = \alpha < 0$$

(рис. 3.16, а). У цьому випадку має місце затухаючий перехідний процес, виконується граничне співвідношення (3.91), фазові траєкторії за умови $t \to \infty$ є збіжними до положення рівноваги, стійкого вузла, 0, (рис. 3.17, а) і

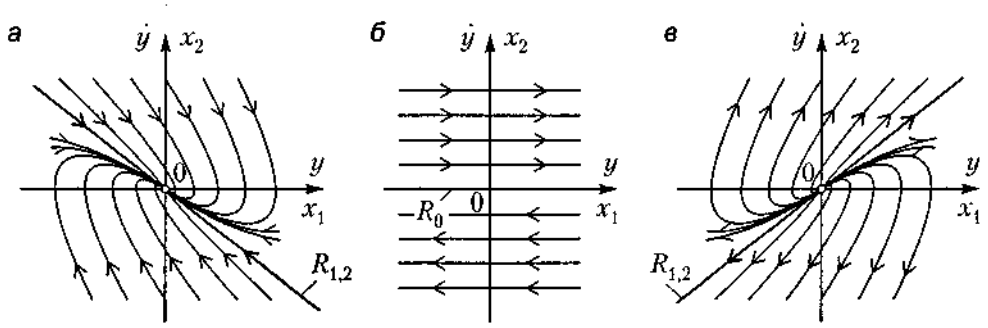


Рис. 3.17 Фазові траєкторії системи ()

система є асимптотично стійкою. Власні підпростори системи R_1, R_2 співпадають. За умови $a_1 = a_2 = 0$, маємо

$$p_1 = p_2 = 0$$

(рис. 3.16) та розбіжний перехідний процес. Форми траєкторії системи (рис. $t \to \infty$

3.17, б) за умови йдуть до нескінченності, за виключенням траєкторій, які починаються на множині рівноважних станів (прямої R_0), яка описується рівнянням $x_2 = const$, і система є нестійкою. За умови $a_1 < 0, a_2 < 0$, виконується

$$Re\, p_{1,2} = \alpha > 0$$

(рис. 3.16, в), власні підпростори системи співпадають. В цьому випадку має місце граничне співвідношення (3.91), фазові траєкторії за умови $t \to \infty$ розбіжні (рис. 3.17, в). Положення рівноваги 0 є нестійким вузлом, і система нестійка.

3. $a_1^2 < 4a_2$. У цьому випадку система має комплексно-спряжені полюси, (рис. 3.18).

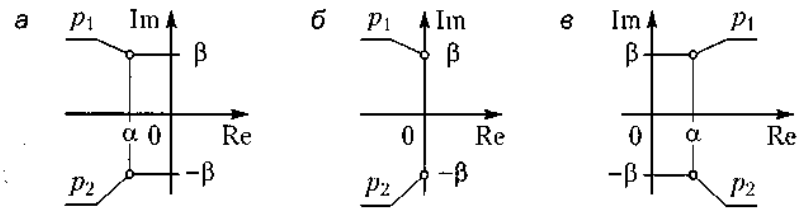


Рис. 3.18. Система з дійсними рівними полюсами

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta = -\frac{a_1}{2} \pm j\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2},$$

а розв'язки рівняння (3.76) мають вигляд

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \beta),$$

що відповідає коливному процесові. Система, що розглядається, має комплексні полюси і не має власних підпросторів. За умови $a_1 > 0, a_2 > 0$,

$$Re\, p_{1,2} = \alpha < 0$$

(рис. 3.19, а). У цьому випадку має місце затухаючий перехідний процес. Виконується (3.91), фазові траєкторії системи за умови $t \to \infty$ збігаються до положення рівноваги 0 (рис. 3.19, а), яке називається стійким фокусом, а система асимптотично стійка.

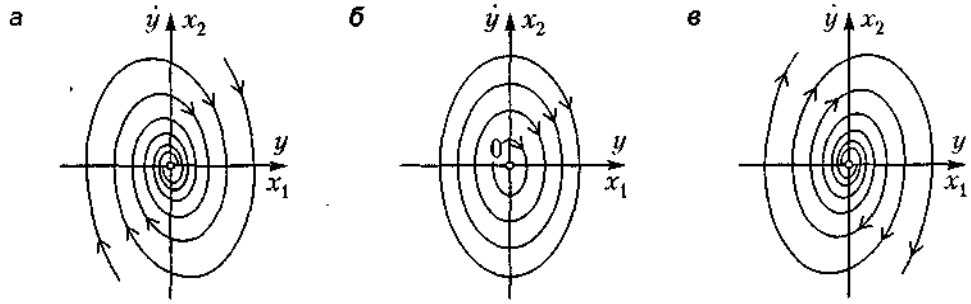


Рис. 3.19. Система з комплексно-спряженими полюсами

За умови $a_2 = 0$, $Re\, p_{1,2} = 0$, система має чисто уявні корені

$j\beta$

$p_{1,2} =$ -

(рис. 3.18, б) і є лінійним осцилятором. У цьому випадку має місце незатухаючий коливальний процес, фазові траєкторії системи є замкненими концентричними кривими, еліптичними орбітами, а система нейтрально стійка (рис. 3.19б б). Положення рівноваги системи – точка 0 називається центром. За умови $a_1 < 0, a_2 < 0$

$Re\, p_{1,2} = \alpha > 0$

(рис. 3.18, в). У цьому випадку має місце розбіжний коливальний перехідний процес. Фазові траєкторії системи за умови $t \to \infty$ є розбіжними від положення рівноваги 0, рис. 3.19, в), яке називається нестійким фокусом, а система нестійка.

3.4. Еквівалентні перетворення та канонічні зображення

Можливі різні способи вибору змінних стану динамічної системи, а неоднозначність вибору визначає відсутність єдності моделей вхід-стан-вихід, вхід-вихід, оскільки вибір інших змінних стану призводить до отримання іншої моделі ВСВ. Окрім того, початкова модель ВСВ може бути спеціально перетворена, що пов'язується із зміною базису, системи координат, простору станів $\mathbf{R}^n$. Ці перетворення називаються еквівалентними, або перетвореннями подібності.

Еквівалентні перетворення. Розглянемо об'єкт управління - одно канальну систему, модель вхід-вихід якої задається операторним рівнянням

$a(p)y(t) = b(p)u(t),$
(3.94)

де
$a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$,
$b(p) = b_1 p^{n-1} + \cdots + b_{n-1}p + b_n.$

та p_i - корені характеристичного рівняння (полюси системи), або рівнянням (2.8), де

$W(p)=\frac{a(p)}{b(p)}.$
(3.95)

Модель ВСВ розглядуваної системи можна записати у формі (3.45), (3.46). Розглянемо новий, перетворений, вектор станів:

$x^* = Px,$
(3.96)

де P - матриця перетворення (подібності), яка задовольняє умову det $P \neq 0.$ Тоді існує обернене перетворення

$x = P^{-1}x^*.$
(3.97)

Диференціюючи за часом (3.96) і підставляючи (3.97), (3.45) матимемо:

$\dot{x}^* = PAP^{-1}x^* + PBu,$
(3.98)

а з виразу (3.46) –

$y = CP^{-1}x^*.$
(3.99)

Отримані вирази можна записати у вигляді

$\dot{x}^* = A^*x^* + B^*u,$
(3.100)
$y = C^*x^*,$
(3.101)

де

$A^* = PAP^{-1}$
(3.102)

- матриця подібна до матриці A ,

$B^* = PB, \qquad C^* = CP^{-1}.$
(3.103)

Канонічні зображення моделей ВСВ. Найпростіші моделі вхід-стан-вихід, які відповідають вихідним рівнянням системи (3.45), (3.46), називаються канонічними зображеннями (формами). Діагональною формою називається модель, рис. 3.20, представлена рівняннями стану

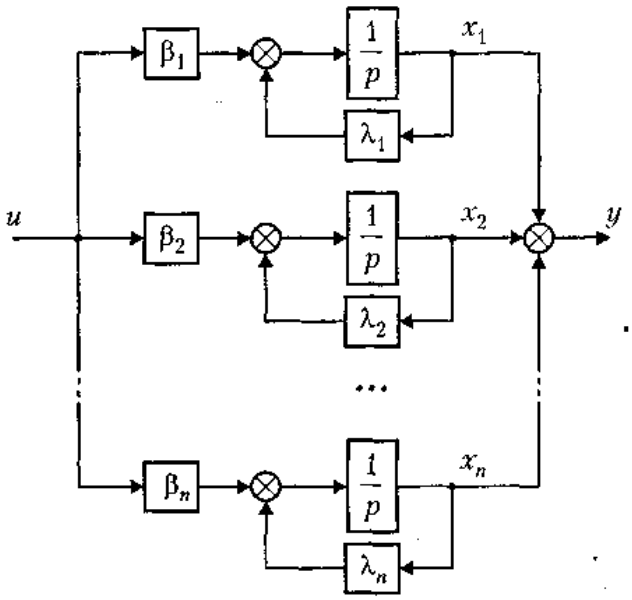


Рис. 3.20. Модель канонічної (діагональної) форми

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u,$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + \beta_2 u,$$
(3.104)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + \beta_n u$$

та рівняння виходу

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$
(3.105)

Модель можна записати у компактній формі (3.100), (3.101), де

$$A^* = \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{vmatrix}, \quad B^* = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix}, \quad C^* = |1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1|.$$

До діагональної форми приводяться системи з некратними дійсними полюсами $p_i = \lambda_i\{A\}$. Матриця основної та перетвореної системи пов’язані співвідношенням

$$A = T\Lambda T^{-1},$$
(3.106)

тобто матриця перетворення знаходиться як

$P = T^{-1}$.
(3.107)

Модель повністю керованої системи можна привести до керованої (фробеніусової) канонічної форми (рис. 3.21):

$\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_3,$
(3.108)
……..
$\dot{x}_{n-1} = x_n,$
$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$

та

$y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \cdots + b_1 x_n,$
(3.109)

де a_i, b_i – коефіцієнти поліномів рівняння (3.94). Цій формі відповідають векторно-матричні рівняння (3.100), (3.101), у яких

$$A^* = \begin{vmatrix} o & I \\ a^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0. & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$C^* = |b_n \quad b_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad b_2 \quad b_1|.$$

де $a^T = |-a_n \quad -a_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad -a_2 \quad -a_1|$, o=$|0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 0|^T$, I - одинична матриця з розміром (n-1)× (n-1). Матриця стану A^* супровідною матрицею полінома $a(p)$, чи фробеніусовою матрицею. Матриця перетворення до канонічної керованої форми знаходиться у вигляді:

$P = U^* U^{-1},$
(3.110)

де U, U^* - матриці керованості (див. далі) вихідної (3.47), (3.48) та канонічної (3.108), (3.109) моделей відповідно. Для випадку $n = 3$ має місце

$$U^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{vmatrix}.$$

Модель повністю спостережуваної системи можна привести до спостережуваної (фробеніусової) канонічної форми, (рис. 3.22):

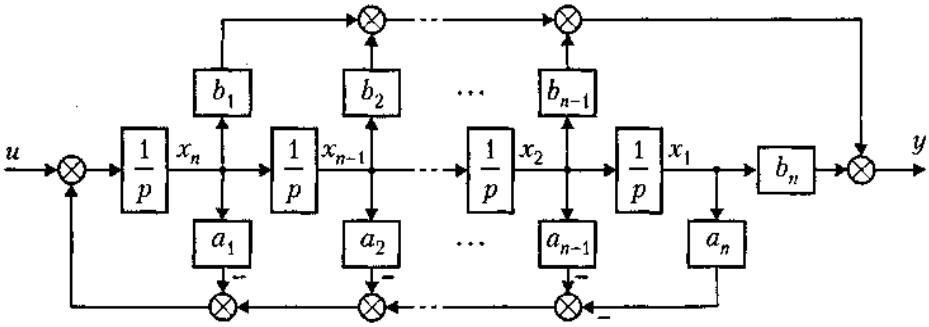


Рис. 3.21. Модель канонічної керованої форми

$$\dot{x}_1 = -a_n x_n + b_n u,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u,$$
(3.111)
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_2 x_n + b_2 u,$$
$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_1 x_n + b_1 u.$$

та

$$y = x_n.$$

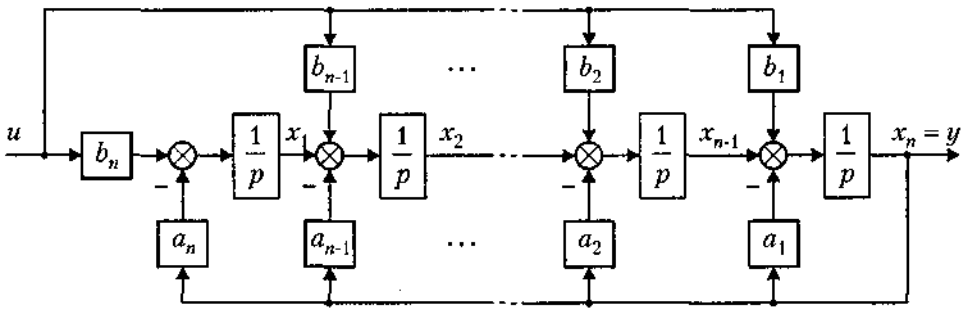


Рис. 3.22. Модель канонічної спостережуваної системи

Цій канонічній формі відповідає векторна-матричне рівняння (3.100), (3.101), де A^* - супровідна (фробеніусова) матриця типу:

$$A^{\uparrow} *= |\blacksquare(o^{\uparrow}T@I)| = |\blacksquare(\blacksquare(0@1@\blacksquare(.@.@\blacksquare(.@0@0)))\&\blacksquare(0@0@\blacksquare(.@.@\blacksquare(.@0@0)))\&\blacksquare(\blacksquare(.@.@\blacksquare(.@.@$$
,

$$C^* = |0 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 1|.$$

Матриця перетворення знаходиться у вигляді:

$$P = [(Q]^{*})Q,$$
(3.112)

де Q, Q^{*} - матриця спостережуваності вихідної та канонічної моделей. Для випадку $n = 3$ має місце:

$$Q^{*} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{vmatrix}.$$

3.5. Керованість та спостережуваність лінійних систем

Поняття керованості та спостережуваності систем керування сформульовані Р. Калманом на початку 60-х років XX ст.. Нехай задана лінійна стаціонарна система:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \\ \dot{\bar{y}}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t). \end{cases}$$
(3.113)

Система (3.113) є *повністю керованою*, якщо її можна перевести за допомогою якогось керування Система (3.113) є повністю керованою, якщо її можна перевести за допомогою якогось керування $U(t), \quad t \in (t_0, t_k)$ з будь-якого початкового стану $\bar{x}_0$ до будь-якого кінцевого стану $\bar{x}_k$, причому $t_k - t_0 < \infty$. Якщо система є керованою не для усіх початкових та кінцевих станів, або не для усіх координат, то вона є *неповністю керованою*. Р. Калман сформулював та довів теорему стосовно керованості системи, згідно з якою система (3.113) є повністю керованою тоді і тільки тоді, коли матриця

$$G = |B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{(n-1)}B|$$
(3.114)

з розмірністю $n \times nm$ має ранг r рівний n , тобто $r = n.$ У випадку, коли $r < n,$ то система (3.113) є неповністю керована, коли ж $r = 0,$ то вона є *повністю некерована*. Коли $m = 1, \quad B = \bar{b}$ – вектор-стовпчик, то матриця $n \times n$

G має розмірність , умова повної керованості має вигляд:

det $G =$ det $|\bar{b} \vdots A\bar{b} \vdots \cdots \vdots A^{(n-1)}\bar{b}| \neq 0.$
(3.115)

Для визначся керованості системи слід мати рівняння стану.

Система (1.113) є *повністю спостережуваною*, якщо шляхом спостереження за $\bar{y}(t)$ при заданому керуванні $\bar{U}(t)$ можна знайти початковий стан системи $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(t)$. Система буде *неповністю спостережуваною*, якщо через виміряні вихідні величини не можна визначити координати її початкового стану. Згідно з теоремою Калмана, система (3.113) є повністю спостережуваною тоді і тільки тоді, коли матриця

$C^T \vdots A^T C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{((n-1)C^T|}$
(3.116)

n

з розмірністю $n \times np$ має ранг r, рівний , тобто $r = n.$ Матриці $C^T,$ A^T - матриці, які є транспонованими, відповідно до $C, A.$ Якщо відносно матриці H виконується умова $r < n,$ то система (3.113) є *неповністю спостережуваною*. Якщо $p = 1,$ $C = C$ є матрицею-рядком, то H має розмірність $n \times n,$ а умова повної спостережуваності має вигляд:

det H =det
$|C^{\uparrow}T \vdots A^{\uparrow}T\ C^{\uparrow}T \vdots \cdots \vdots\ [\ [(A]\ ^{\uparrow}T)]\ ^{\uparrow}((n-1)\ C^{\uparrow}T\ | \neq 0.$

(3.117)

Для визначення спостережуваності системи необхідно мати рівняння стану та рівняння виходу системи. Якщо передатна функція об’єкта керування з одним входом та одним виходом має вигляд раціонального дробу з однаковими полюсами та нулями (тобто вона вироджена), то за цих умов об’єкт є неповністю керованим і неповністю спостережуваним. Некерованість та неспостережуваність системи керування пов’язані з тим, що розмірність простору більшою, ніж потрібно, внаслідок певних математичних перетворень.

Приклад. Система управління описується рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + u; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Визначити керованість та спостережуваність системи.
Розв'язок. На основі системи рівнянь визначаємо матриці:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; B = Б = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}; C = C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix},$$

знаходимо

$$A^T = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, AБ = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad C^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad A^T C^T = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Складаємо матриці G, H:

$$G = \begin{vmatrix} Б \vdots AБ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, H = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки det $G = -1 \neq 0$, det $H = 2 \neq 0$, то система управління є повністю керованою та повністю спостережуваною.
Приклад. Система управління описується рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1; \\ y = x_2. \end{cases}$$

Визначити керованість та спостережуваність системи.
Розв'язок. Оскільки

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad B = Б = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad C = C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix};$$
$$A^T = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad AБ = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}; \quad C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad A^T C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix},$$

то

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \text{ det } G = -1 \neq 0, \quad H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \text{ det } H = 0,$$

тобто система управління є повністю керованою, але не повністю спостережуваною.

4. Методи дослідження стійкості систем
4.1. Стійкість за Ляпуновим, основні поняття та означення

Нехай є математична модель у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.1}$$

Розв'язок $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системи (4.1), який задовольняє початкові умови $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, називається стійким *за Ляпуновим*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для *всякого* розв'язку $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системи (4.1), початкове значення якого задовольняє умови:

$$|x_i(t) - \varphi_{i0}| < \delta, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

мають місце нерівності

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

для всіх $t \geq t_0$. Якщо для як завгодно малого $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, нерівності (4.3) не виконуються, то розв'язок $\varphi_i(t)$ називається *нестійким.* Якщо крім виконання нерівностей (4.3) за умови (4.2) виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

то розв'язок $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ називається *асимптотично нестійким*. Дослідження на стійкість розв'язку $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системи (4.1) можна звести

до дослідження на стійкість нульового (тривіального) розв'язку $x_i \equiv 0, i = \overline{1,n}$, деякої системи, аналогічної системі (4.1),

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

де $F_i(0,0,...,0.t) \equiv 0, \ i = \overline{1,n}.$

Кажуть. Що точка $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, є *точкою спокою* системи (4.4). Стосовно точки спокою означення стійкості та нестійкості можна сформулювати наступним чином. *Точка спокою* $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, *стійка за Ляпуновим*, якщо, яким би не було $\varepsilon > 0$, можна знайти таке $\delta > 0$, що для будь-якого розв'язку $x_i(t), \ i = \overline{1,n}$, початкові дані для якого $x_{i0} = x_i(t_0), \ i = \overline{1,n}$, задовольняє умову:

$$|x_{i0}| < \delta, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

виконуються нерівності:

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

для всіх $t \geq t_0$.

Для випадку $n = 2$ геометрично це означає наступне. Яким би вузьким не був циліндр з радіусом ε з віссю Ot, в площині $t = t_0$ знайдеться δ - окіл точки $(0,0,t_0)$ такий, що всі інтегральні криві

$$x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t),$$

які виходять з цього околу, для всіх $t \geq t_0$ залишатимуться усередині цього циліндру, рис. 1.

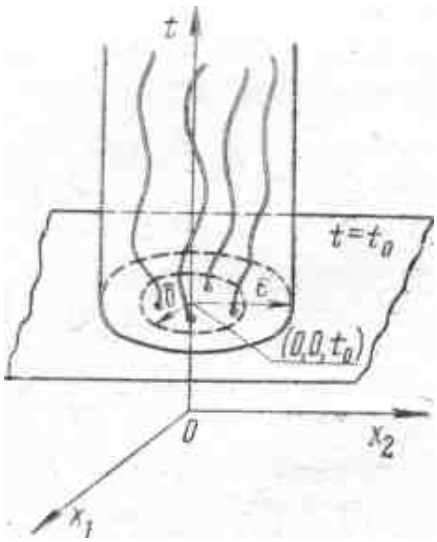


Рис. 4.1. Ілюстрація до питання про стійкість за Ляпуновим.

Якщо крім виконання нерівностей (4.6), виконуються також умова $\lim_{t\to\infty}|x_i(t)| = 0$, $i = \overline{1,n}.$, то *стійкість асимптотична*. *Точка спокою* $x_i = 0,\ i = \overline{1,n}$, *нестійка*, якщо для як завгодно малого $\delta > 0$, хоча б для одного розв'язку $x_i(t),\ i = \overline{1,n}$ умова (6) не виконується.

Приклад. *Виходячи з означення стійкості за Ляпуновим, дослідити на стійкість рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x,$$

(4.7)

задовольняє початкову умову

$$x(0) = 0.$$

Розв'язок. *Рівняння (4.7) є лінійним неоднорідним рівнянням, загальний розв'язок якого є* $x(t) = C \cdot e^{-t} + t.$ *Початкову умову* $x(0) = 0$ *задовольняє розв'язок*

$$\varphi(t) = t$$

(4.8)

рівняння (4.7). Початкову умову $x(0) = x_0$ *задовольняє розв'язок*

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-t} + t.$$

(4.9)

Розглянемо різницю розв'язків (4.9) та (4.8) рівняння (4.7) і запишемо її так:

$x(t)-\varphi(t)=x_0\cdot e^{-t}+t-t=(x_0-0)\cdot$

Звідси випливає, що для всякого $\varepsilon>0$ *існує* $\delta>0$, *наприклад,* $\delta=\varepsilon$, *таке, що для всякого розв'язку* $x(t)$ *рівняння (4.7), початкові значення яких задовольняють умову* $|x_0-0|<\delta$, *виконується нерівність*

$$|x(t)-\varphi(t)|=|x_0-0|\cdot e^{-t}<\varepsilon$$

для всіх $t\geq 0$. *Тобто розв'язок* $\varphi(t)=t$ *є стійким, більше того, оскільки*

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-\varphi(t)|=\lim_{t\to\infty}|x_0-0|\cdot e^{-t}=0$$

розв'язок $\varphi(t)=t$ *є асимптотичним стійким. Цей розв'язок* $\varphi(t)$ *є необмеженим при* $t\to+\infty$.

Цей приклад показує, що з стійкості розв'язку диференціального рівняння не випливає обмеженість розв'язку.

Приклад. *Розглянемо рівняння:*

$$\frac{dx}{dt}=\sin^2 x.$$

(4.10)

Воно має очевидні розв'язки

$$x=k\cdot\pi, \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

(4.11)

Інтегруємо рівняння (4.10):

$ctg\ x=C-t$, *або* $ctg\ x=ctg\ x_0-t$, *звідки*

$$x=arcctg(ctg\ x_0-t), \qquad x\neq k\cdot\pi.$$

(4.12)

Всі розв'язки (4.11) та (4.12) обмежені на $(-\infty,+\infty)$. *Розв'язок* $x(t)\equiv 0$ *нестійкий при* $t\to+\infty$, *оскільки при будь-якому* $x_0\in(0,\pi)$ *маємо* $\lim_{t\to+\infty}x(t)=\pi$. *Тобто, з обмеженості розв'язків диференціального рівняння, в загальному випадку, не випливає їх стійкість, рис. 2. Це характерно для нелінійних рівнянь та систем.*

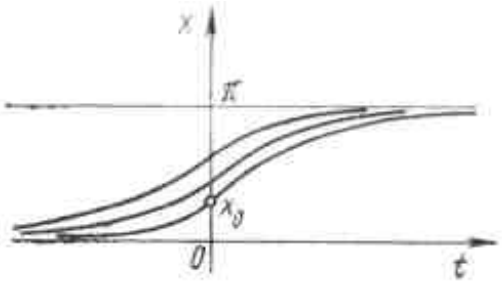


Рис. 4.2. Ілюстрація стійкості розв'язку рівняння (4.10).

Приклад. *Виходячи з означення за Ляпуновим, показати, що розв'язок системи*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

(4.13)

який задовольняє початкові умови $x(0) = 0, y(0) = 0$, *стійкий.*

Розв'язок. *Розв'язок системи (4.13), який задовольняє умову, має вигляд* $x(t) = x_0 \cdot \cos t - y_0 \cdot \sin t$, $y(t) = x_0 \cdot \sin t + y_0 \cdot \cos t$. *Візьмемо довільне* $\varepsilon > 0$ *і покажемо, що існує* $\delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що за умови* $|x_0 - 0| < \delta, |y_0 - 0| < \delta$ *мають місце нерівності*

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cdot \cos t - y_0 \cdot \sin t| < \varepsilon, \ |y(t) - 0| = |x_0 \cdot \sin t + y_0 \cdot \cos t| < \varepsilon,$$

для всіх $t \geq 0$. *Це означатиме, згідно з означенням, що нульовий розв'язок* $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ *системи (13) стійкий за Ляпуновим. Звідки маємо:*

$$|x_0 \cdot \cos t - y_0 \cdot \sin t| \leq |x_0 \cdot \cos t| + |y_0 \cdot \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \quad |x_0 \cdot \sin t + y_0 \cdot \cos t| \leq |x_0 \cdot \sin t| + |y_0 \cdot \cos t| \leq |x_0| + |y_0|.$$

(4.14)

для всіх t . *Тому, якщо* $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, *то тим більше*

$$|x_0 \cdot \cos t - y_0 \cdot \sin t| < \varepsilon, \qquad |x_0 \cdot \sin t + y_0 \cdot \cos t| < \varepsilon$$

(4.15)

для всіх t. *Тобто, якщо взяти* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / 2$, *то за умови* $|x_0 < \delta|$ *та* $|y_0| < \delta$ *в силу (4.14) матимуть місце нерівності (4.15) для всіх* $t \geq 0$, *тобто нульовий розв'язок системи (4.13) стійкий за Ляпуновим, але ця стійкість не асимптотична.*

Теорема. Розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j + f_i(t), \;\; i = \overline{1,n},$$

або всі одночасно стійкі, або нестійкі.

Теорема не справедлива для нелінійних систем, їх деякі розв'язки можуть бути стійкими, а інші – нестійкими.

Приклад. Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} 1 - x^2(t).$$

(4.16)

Воно має очевидні розв'язки $\varphi(t) = -1$ та $\varphi(t) = 1$. Розв'язок $\varphi(t) = -1$ цього рівняння нестійкий, а розв'язок $\varphi(t) = 1$ є асимптотично стійким. Дійсно, при $t \to +\infty$ всі розв'язки рівняння (4.16)

$$x(t) = \frac{(1 + x_0) \cdot e^{2 \cdot (t - t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0) \cdot e^{2 \cdot (t - t_0)} + (1 - x_0)}, (x_0 \neq -1)$$

прямують до +1, що означає, згідно з означенням, що розв'язок $\varphi(t) \equiv 1$ рівняння асимптотично стійкий.

4.2. Найпростіші типи точок спокою.

Нехай є система двох лінійних однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y, \end{cases}$$

(4.17)

причому $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Точка $x = 0, y = 0,$ в якій праві частини рівнянь системи (4.17) обертаються в нуль, називається *точкою спокою системи* (4.17). Для дослідження точки спокою системи (4.17) слід скласти характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

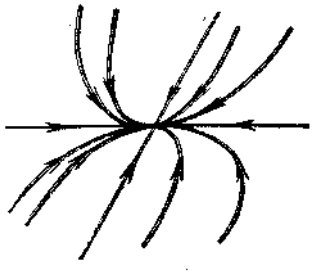
(4.18)

і знайти його корені λ_1, λ_2. Можливі такі випадки:

1. Корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння (4.18) дійсні і різні:

а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол, рис. 3);

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол, рис. 4);



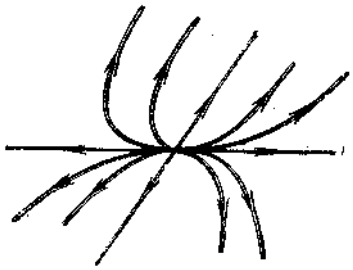


Рис. 4.3. Рис. 4.4.

в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Точка спокою нестійка (сідло, рис. 4.5);

2. Корені характеристичного рівняння (18) комплексні: $\lambda_1 = p + i \cdot q$, $\lambda_2 = p - i \cdot q$;

а) $p < 0,\ q \neq 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий фокус, рис. 4.6);

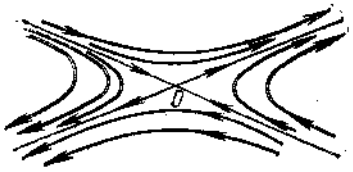


Рис. 4.5. Рис. 4.6.

б) $p > 0,\ q \neq 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий фокус, рис. 4.7);

в) $p = 0,\ q \neq 0$. Точка спокою стійка (центр, рис. 4.8);

3. Корені $\lambda_1 = \lambda_2$ кратні:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол, рис. 4.9, 4.10);

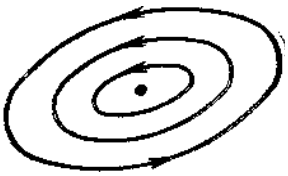


Рис. 4.7. Рис. 4.8.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Точка спокою нестійка (рис. 4.11, 4.12);

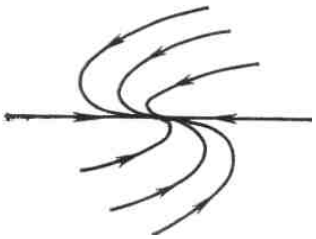


Рис. 4.9.

Рис. 4.10

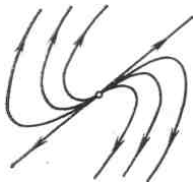


Рис. 4.11.

Рис. 4.12.

Приклад. Визначити тип точки спокою (0, 0) системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5 \cdot x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \cdot x + y. \end{cases}$$

Розв'язок. *Складаємо характеристичне рівняння*

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 7 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0,\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ *дійсні, різні, додатні. Тобто точка спокою (0, 0) – нестійкий фокус.*

Зв'язок між типами точок спокою та значеннями коренів характеристичного рівняння (4.17) можна подати наглядно. Для цього введемо позначення $\sigma = -(a_{11} + a_{22}),\ \Delta = a_{11} \cdot a_{22}$. Тоді характеристичне рівняння запишеться у вигляді $\lambda^2 + \sigma \cdot \lambda + \Delta = 0$. Розглянемо площину з прямокутними декартовими координатами Δ, σ і відмітимо на ній області, які відповідають різним типам точок спокою (рис. 4.13).

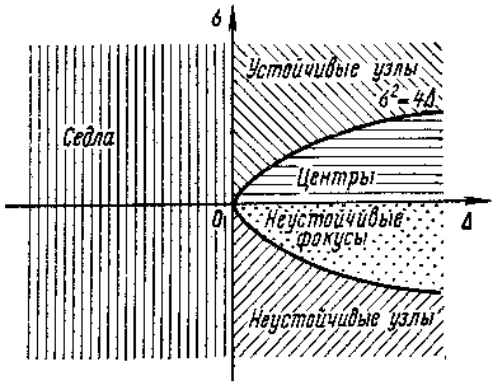


Рис. 4.13. Розташування точок спокою в системі координат (Δ, σ).

З наведеної вище класифікації випливає, що умовами стійкості точки спокою є $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0.$ Вони виконуються за умови $\Delta > 0,\ \sigma > 0$, тобто для точок, які знаходяться в першій чверті. Якщо λ_1, λ_2 комплексні, то точки спокою будуть типу фокусу, цій умові відповідають точки, які лежать між вітками параболи $\sigma^2 = 4 \cdot \Delta$ і не належать осі $O\Delta$ ($\sigma^2 < 4 \cdot \Delta,\ \sigma \neq 0$). Точки півосі $\sigma = 0$, для яких $\Delta > 0,$ відповідають точкам спокою типу центру. Точки, розташовані поза параболою $\sigma^2 = 4 \cdot \Delta$ ($\sigma^2 > 4 \cdot \Delta$), відповідають точкам спокою типу вузла. Область площини $O\Delta\sigma$, де $\Delta < 0,$ містять точки спокою типу сідла. Виключаючи особливі випадки (проходження через початок координат), відмічаємо, що сідло може перейти в вузол стійкий чи нестійкий (Рис. 4.13). Стійкий вузол може перейти чи в сідло, чи в стійкий фокус. Випадок рівних коренів $\lambda_1 = \lambda_2$ відповідає границі між вузлами та фокусами, тобто параболі $\sigma^2 = 4 \cdot \Delta$.

Приклад. Дослідити рівняння пружних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dx}{dt} + \beta^2 \cdot x = 0$$
(4.19)

З врахуванням тертя та опору середовища (за умови $\alpha > 0$).

Розв'язок. Переходимо від рівняння (4.19) до еквівалентної йому системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2 \cdot \alpha \cdot y - \beta^2 \cdot x. \end{cases}$$
(4.20)

Для визначення характеру точки спокою (0, 0) системи (4.20) складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\cdot\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ чи } \lambda^2 + 2\cdot\alpha\cdot\lambda + \beta^2 = 0;$$

звідки

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \qquad (21)$$

Розглянемо такі випадки: а) $\alpha = 0$ (опір середовища відсутній). З (4.21) маємо $\lambda_{1,2} = \pm i\cdot\beta.$ Точка спокою стійка – центр (всі рухи є періодичні):
б) $\alpha > 0, \alpha^2 - \beta^2 < 0$. Корені λ_1, λ_2 - комплексно-спряжені, причому $\operatorname{Re}\lambda < 0.$ Точка спокою – стійкий фокус (коливання затухають);
в) $\alpha < 0$ (випадок «від'ємного тертя»), $\alpha^2 - \beta^2 < 0.$ Корені λ_1, λ_2 - комплексно-спряжені, причому $\operatorname{Re}\lambda > 0.$ Точка спокою – нестійкий фокус;
г) $\alpha > 0, \alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ (опір середовища великий $\alpha \geq \beta$). Корені λ_1, λ_2 - дійсні і від'ємні. Точка спокою – стійкий вузол (всі розв'язки затухаючі і неколивні);
д) $\alpha < 0, \alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ (випадок великого «від'ємного тертя»). Корені λ_1, λ_2 дійсні і додатні. Точка спокою – нестійкий вузол.

Нехай є система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\cdot x_j, \; i = \overline{1,n} \; (n \geq 2). \qquad (22)$$

Для неї мають місце аналогічні типи розташування інтегральних кривих навколо початку координат (узагальнене сідло, узагальнений вузол, тощо).

Теорема. Якщо всі корені характеристичного рівняння для системи (4.22) мають від'ємну дійсну частину, то точка спокою системи (4.22) $x_i = 0,$ $i = \overline{1,n}$, асимптотично стійка. Якщо хоча б один з коренів характеристичного рівняння має додатну уявну частину, то точка спокою нестійка.

Приклад. Чи буде стійкою точка спокою (0, 0, 0) системи , яка описується диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2\cdot y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z. \end{cases}$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

чи $(1+\lambda)\cdot(\lambda^2+3\cdot\lambda+3)=0.$ Корені цього рівняння $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ мають від'ємні дійсні частини, тобто точка спокою цієї системи асимптотично стійка.

4.3. Метод функцій Ляпунова.

Цей метод полягає в безпосередньому дослідженні стійкості положення рівноваги системи

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n),\ \ i=\overline{1,n},$$

з використанням належним чином підібраної функції $V(t,x_1,x_2,...,x_n)$ - *функції Ляпунова*, причому це робиться без попереднього знаходження розв'язків системи. Обмежимося розглядом автономних систем

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n), \qquad i=\overline{1,n},$$
(4.23)

для яких $x_i\equiv 0,\ \ i=\overline{1,n},$ є точкою спокою. Функція $V(t,x_1,x_2,...,x_n)$, визначена в деякому околі початку координат, називається *знаковизначеною* (чітко додатною або чітко від'ємною), якщо вона в області

$$|x_i|\le h, \qquad i=\overline{1,n},$$
(4.24)

Де h - достатньо мале додатне число, може приймати значення тільки певного знаку і дорівнює нулю тільки тоді, коли $x_1=x_2=...=x_n=0.$ Так у випадку $n=3$ функції

$$V=x_1^2+x_2^2+x_3^2 \text{ та } V=x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+2\cdot x_2^2+x_3^2$$

будуть додатними визначеними, причому величина $h>0$ може бути як завгодно великою. Функція $V(x_1,x_2,...,x_n)$ називається знакопостійною (додатною чи від'ємною), якщо вона в області (4.24) може приймати

значення тільки певного знаку, але може дорівнювати нулю і за умови $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0.$ Наприклад функція

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_3^2$$

буде знакопостійною (додатною). Дійсно, функцію $V(x_1, x_2, x_3)$ можна записати $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2,$ звідки видно, що вона обертається в нуль за умови $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, а саме за умови $x_3 = 0$ та будь-яких x_1, x_2 таких, що $x_1 = -x_2$.

Нехай $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ - диференційована функція своїх аргументів і нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ є певними функціями часу, які задовольняють систему диференціальних рівнянь (4.23). Тоді для повної похідної функції V за часом матимемо:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$
(4.25)

Величина $\frac{dV}{dt}$, яка визначається згідно (4.25), називається *повною похідною функції V за часом*, складеною в силу системи диференціальних рівнянь (4.23).

Теорема. (Теорема Ляпунова про стійкість). Якщо для систем диференціальних рівнянь (4.23) існує знаковизначена функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ (функція Ляпунова), повна похідна $\frac{dV}{dt}$ якої за часом, складена в силу системи (23), є знакосталою функцією, із знаком, протилежним знаку V, чи тотожно рівна нулю, то точка спокою $x_i = 0,\ i = \overline{1, n},$ системи (4.23) є стійкою.

Теорема. (Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (4.23) існує знаковизначена функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, повна похідна якої за часом, складена в силу системи (4.23), є також знаковизначеною функцією, із знаком, протилежним з V, то точка спокою $x_i = 0,\ i = \overline{1, n},$ системи (4.23) є асимптотично стійкою.

Приклад. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$
(4.26)

Виберемо в якості функції $V(x,y)$ *функцію* $V = x^2 + y^2$.*Ця функція визначено-додатна, похідна функції* V *в силу системи (4.26) дорівнює*

$$\frac{dV}{dt} = 2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dt} = 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x \cdot y + 0.$$

З першої теореми Ляпунова випливає, що точка спокою $O(0,0)$ *стійка, проте асимптотичної стійкості немає: траєкторія системи (4.26) – кола і вони не прямують до точки* $O(0,0)$ *при* $t \to +\infty$.

Приклад. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \ , \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3 \cdot y^2 . \end{cases}$$

(4.27)

Беремо знову $V = x^2 + y^2$, *знаходимо*

$$\frac{dV}{dt} = 2 \cdot x \cdot (y - x^3) + 2 \cdot y \cdot (-x - 3 \cdot y^3) = -2 \cdot (x^4 + 3 \cdot y^4).$$

Тобто $\frac{dV}{dt}$ *є визначено-від'ємна функція і в силу другої теореми Ляпунова точко спокою* $O(0,0)$ *системи (4.27) стійка асимптотично.*

Загального методу побудови функцій Ляпунова немає, в найпростішому випадку функцію Ляпунова можна шукати у вигляді

$V(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$, $V(x,y) = a \cdot x^4 + b \cdot y^4$, $V(x,y) = a \cdot x^4 + b \cdot y^2$ $(a > 0, b > 0)$ *і т.п.*

Приклад. *З використанням функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок* $x \equiv 0, y \equiv 0$ *системи*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2 \cdot y + x^2 \cdot y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{x^3 \cdot y}{2}. \end{cases}$$

Розв'язок. *Шукатимемо функцію Ляпунова у вигляді* $V(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$, $a > 0, b > 0$ *- параметри. Тоді матимемо*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2 \cdot a \cdot x \cdot (-x - 2 \cdot y + x^2 \cdot y^2) + 2 \cdot b \cdot y \cdot (x - \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot y) =$$
$$= -(2 \cdot a \cdot x^2 + b \cdot y^2) + (2 \cdot x \cdot y - x^3 \cdot y^2) \cdot (b - 2 \cdot a).$$

Поклавши $b = 2 \cdot a$, *отримаємо* $\frac{dV}{dt} = -2 \cdot a \cdot (x^2 + y^2) \le 0$, *тобто за умови всякого* $a > 0, b = 2 \cdot a$ *функція* $V = a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot y^2$ *буде визначено-додатною, а її похідна* $\frac{dV}{dt}$, *складена за даною системою, є визначено-від'ємною. З другої теореми Ляпунова випливає, що тривіальний розв'язок* $x \equiv 0, y \equiv 0$ *даної системи є стійким асимптотично. Якщо б у вказаній вище формі функцію* $V(x, y)$ *не вдалося знайти, то її слід було шукати в формі* $V(x, y) = a \cdot x^4 + b \cdot y^4$, $V(x, y) = a \cdot x^4 + b \cdot y^2$ $(a > 0, b > 0)$ і т.п.

Теорема. (Теорема Ляпунова про нестійкість). Нехай для системи диференціальних рівнянь (4.23) існує диференційована в околі початку координат функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ така, що $V(0,0,...,0) = 0$. Якщо її повна похідна $\frac{dV}{dt}$, складена за системою (4.23), є визначено-додатна функція і як завгодно близько від початку координат є точки, в яких функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ приймає додатні значення, то точка спокою $x_1 = 0,\ i = \overline{1, n}$ нестійка.

Теорема. (Теорема Четаєва про нестійкість). Нехай для системи диференціальних рівнянь (4.23) існує неперервно-диференційована в певному околі точко спокою $x_1 = 0,\ i = \overline{1, n}$ функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задовольняє в деякому околі точко спокою умови: 1) в як завгодно малому околі Ω точки спокою $x_1 = 0,\ i = \overline{1, n}$, існує область Ω_1, в якій $v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, причому $v = 0$ в тих граничних точках Ω_1, які є внутрішніми для Ω (рис. 14);

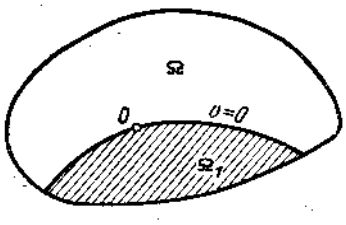


Рис. 4.14. Ілюстрація точок Ω_1, внутрішніх для Ω

2) точка спокою $O(0,0,...,0)$ є граничною точкою області Ω_1;

3) в області Ω_1 похідна $\frac{dv}{dt}$, складена за системою (4.23), визначено-додатна.

Тоді точка спокою $x_1 = 0,\ i = \overline{1, n}$ системи (4.23) нестійка.

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0, y = 0$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Розв'язок. Візьмемо функцію $v(x,y)=x^2-y^2$. Тоді $\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{dt}=$ $=2\cdot x^2+2\cdot y^2$ є функцією визначено-додатною. Оскільки як завгодно близько до початку координат знайдуться точки, в яких $v>0$ (наприклад, $v=x^2>0$ вздовж прямої $y=0$), то виконуються всі умови третьої теореми Ляпунова і точка спокою $O(0,0)$ нестійка (сідло).

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $x=0, y=0$ системи

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y^3+x^5,\\ \frac{dy}{dt}=x^3+y^5.\end{cases}$$

Розв'язок. Функція $v=x^4-y^4$ задовольняє умову теореми Четаєва: 1) $v>0$ за умови $|x|>|y|$; 2) $\frac{dv}{dt}=4\cdot(x^8-y^8)$ - визначено-додатна в області $|x|>|y|$. Тобто точка спокою $x=0, y=0$ нестійка.

4.4. Стійкість за першим наближенням.

Нехай є система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,...,x_n),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{4.28}$$

і нехай $x_i\equiv 0,\ \ i=\overline{1,n}$ є точкою спокою системи (4.28), тобто $f_i(0,0,...,0)=0$, $i=\overline{1,n}$. Вважатимемо, що функція $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ диференційовані в початку координат достатнє число раз. Розкладемо функції f_s в ряд Тейлора (лінійна частина) за x в околі початку координат:

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j-1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j+R_i(x_1,x_2,...,x_n),$$

де $\alpha_{ij}=\frac{\partial f(0,0,...,0)}{\partial x_j}$; R_i - члени другого та більшого порядків малості відносно $x_1,x_2,...,x_n$. Тоді система (4.28) запишеться у вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j+R_i(x_1,x_2,...,x_n),\ \ i=\overline{1,n}. \tag{4.29}$$

Замість системи (4.29) розглянемо систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \ \ i = \overline{1,n}, \ (\alpha_{ij} = const), \tag{4.30}$$

яка називається *системою першого наближення* для системи (4.28). Справедливими є такі твердження.

1) Якщо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \lambda & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & . & . & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.31}$$

мають від'ємні дійсні частини, то нульові розв'язки $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, системи (4.30) та системи (4.29) асимптоточно стійкі.

2) Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння (4.31) має додатну дійсну частину, то нульовий розв'язок системи (4.30) та системи (4.29) стійкий. Кажуть, що у випадках 1 та 2 можливо дослідження на стійкість за першим наближенням. В критичних випадках, коли дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (4.31) не є додатними, причому дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, дослідження на стійкість за першим наближенням неможлива, оскільки починають впливати нелінійні члени R_i.

Приклад. Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x = 0, y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \cdot x + y - 5 \cdot y^2, \\ \dot{y} = 3 \cdot x + y + \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ \dot{y} = \frac{dy}{dt}). \tag{4.32}$$

Розв'язок. Система першого наближення має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \cdot x + y, \\ \dot{y} = 3 \cdot x + y; \end{cases} \tag{4.33}$$

нелінійні члени задовольняють потрібні умови: їх порядок більший чи рівний двом. Складемо характеристичне рівняння для системи (4.33):

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ чи } \lambda^2 - 3 \cdot \lambda - 1. \tag{4.34}$$

Корені характеристичного рівняння (4.34) $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{3}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{3}$ дійсні і $\lambda_1 > 0$, тобто нульовий розв'язок $x = 0, y = 0$ системи (32) нестійкий.

Приклад. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^2. \end{cases}$$

(4.35)

Точка спокою $x \equiv 0, y \equiv 0$ *системи (4.35) асимптотична стійка, оскільки для цієї системи функція* $v = x^2 + y^2$ *задовольняє всі умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Зокрема,*

$$\frac{dv}{dt} = 2 \cdot x \cdot (y - x^3) + 2 \cdot y \cdot (-x - y^3) = -2 \cdot (x^4 + y^4) \le 0.$$

В той же час точка спокою $x \equiv 0, y \equiv 0$ *системи*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3, \end{cases} \qquad (4.36)$$

нестійка в силу теореми Четаєва. Взявши $v = x^2 + y^2$, *матимемо* $\frac{dv}{dt} = 2 \cdot (x^4 + y^4) \ge 0.$ *Системи (35), (36) мають одну й ту ж саму першого наближення*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \qquad (4.37)$$

Характеристичне рівняння для системи (4.37)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 + 1 = 0$$

має чисто уявні корені, тобто дійсні частини коренів характеристичного рівняння дорівнюють нулю. Для системи першого наближення (4.37) початок координат є центром. Системи (4.35), (4.36) отримані малим збуренням правих частин системи (37) в околі початку координат. Ці малі

збурення призводять до того, що замкнуті траєкторії перетворюються на спіралі , які у випадку (4.35) наближаються до початку координат і утворюють в точці $O(0,0)$ *стійкий фокус, а у випадку (4.36) – нестійкий фокус, утворюваний ними, в результаті віддалення від початку координат. Тобто в критичному випадку нелінійні члени можуть впливати на стійкість точки спокою.*

Приклад. *Розглянемо заманений контур з нелінійними елементами, рис. 15; рівняння контуру має вигляд*:

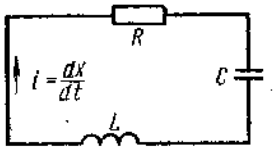


Рис. 4.15. Схема замкненого контуру з нелінійними елементами.

$$L \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + R \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C} \cdot x + g(x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$
(4.38)

В (38) x *- заряд конденсатора;* $\frac{dx}{dt}$ *- струм в ланці;* R *- опір;* L *- індуктивність; C – ємність;* $g(x, \frac{dx}{dt})$ *- нелінійні члени, із ступенем не нижче другого,* $g(0,0)$. *Рівняння (4.38) еквівалентне системі*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot x - \frac{R}{L} \cdot y - \frac{1}{L} \cdot g(x, y), \end{cases}$$
(4.39)

для якої початок координат є точкою спокою. Розглянемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot x - \frac{R}{L} \cdot y. \end{cases}$$
(4.40)

Характеристичне рівняння для системи (40) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{1}{L\cdot C} & -\dfrac{R}{L}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{або} \qquad \lambda^2 + \frac{R\cdot\lambda}{L} + \frac{1}{L\cdot C} = 0.$$
(4.41)

Якщо $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{L\cdot C}$, *тобто* $R^2 < \frac{4\cdot L}{C}$, *а рівняння (4.41) має комплексні корені з від'ємною дійсною частиною* $p = -\frac{R}{4\cdot L}$, *це означає, що початок координат O(0,0) для системи (4.39), (4.40) асимптотично стійка. Якщо* $R^2 > \frac{4\cdot L}{C}$, *то початок координат також асимптотоично стійкий (всі параметри* R, L, C *додатні). Асимптотична стійкість точки спокою зрозумілий з фізичних міркувань: за умови додатного омічного опору із зростанням* t *струм зникає.*

4.5. Стійкість розв'язку диференціальних рівнянь по відношенню до зміни правих частин рівняння.

Розглянемо диференціальні рівняння

$$y' = f(x, y),$$
(4.42)
$$y' = f(x, y) + \Theta(x, y),$$
(4.43)

де функції $f(x, y), \Theta(x, y)$ неперервні в замкненій області $\overline{G}$ площини xOy і функція $f(x, y)$ має в цій області неперервну частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$. Нехай $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ є розв'язками рівнянь (4.42), (4.43) відповідно, які задовольняють одну й ту ж початкову умову $\varphi\big|_{x=x_0} = y_0$, то

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot(e^{M\cdot|x-x_0|} - 1),$$
(4.44)

де $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{G}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

З оцінки (44) можна бачити, що якщо збурення $\Theta(x, y)$ правої частини (4.42) достатньо мале в області $\overline{G}$, то на скінченному інтервалі зміни x різниця розв'язків рівнянь (4.42), (4.43) буде малою за абсолютною величиною. Це дає змогу наближено розв'язувати складні диференціальні рівняння шляхом заміни їх належно вибраними рівняннями, які розв'язуються простіше. Останнє можна істотно використовувати при розв'язку диференціальних рівнянь, пов'язаних з задачами фізики та техніки.

Приклад. *В квадраті* $Q\{-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$ *знайти наближений розвозок рівняння*

$$y' = \sin(x \cdot y),$$
(4.45)

який задовольняє початкову умову

$$y\big|_{x=0} = 0.1,$$
(4.46)

і оцінити похибку.

Розв'язок. *Замінимо рівняння (4.45) рівнянням*

$$y' = x \cdot y, \qquad y\big|_{x=0} = 0.1.$$
(4.47)

Рівняння (47), за відповідної початкової умови, має розв'язок $y = 0.1 \cdot e^{x^2/2}$, *який для всіх* $x \in [-1/2, 1/2]$ *не виходить з основного квадрату* $x \in [-1/2, 1/2]$ *В силу теореми існування та єдності розв'язку рівняння (4.45) за початкової умови (4.46) має єдиний розв'язок* $y = \psi(x)$ *і як наближений розв'язок задачі (4.45), (4.46) можна взяти* $y = 0.1 \cdot e^{x^2/2}$ *- розв'язок задачі (4.47). Оцінимо різницю* $\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|$, $x \in [-1/2, 1/2]$, *де* $\varphi(x) = 0.1 \cdot e^{x^2/2}$ *- розв'язок задачі (4.47). В даному випадку* $f(x, y) = x \cdot y$ *і* $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x| \le \frac{1}{2}$. *Згідно формули Тейлора* $|\sin z - z| \le \frac{|z|^3}{6}$, *тому в квадраті* Q

$$|\sin(x \cdot y) - x \cdot y| \le \frac{|x \cdot y|^3}{6} < \frac{1}{4^3 \cdot 6} = \frac{1}{384}.$$

Скориставшись оцінкою (4.44), взявши $\varepsilon = \frac{1}{384}, M = \max\limits_{(x,y)\in Q}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}$:

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)| \le \frac{1}{192} \cdot (e^{|x|/2} - 1) < \frac{1}{650}, \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Можна бачити, що розв'язок $\psi(x)$ *задачі (45), (46) не виходить з основного квадрату* Q.

4.6. Критерій Рауса-Гурвіца.

Нахай є лінійне диференціальне рівняння з сталими дійсними коефіцієнтами:

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_2 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n \cdot y = 0, \qquad (a_0, a_1, ..., a_n = const, a_0 > 0).$$
(4.48)

Нульовий розв'язок $y = 0$ рівняння (48) асимптотично стійкий, якщо всі корені характеристичного рівняння

$$f(\lambda) \equiv a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad (49)$$

мають від'ємні дійсні частини.

Для того щоб всі корені рівняння (4.49) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвиця

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$
(4.50)

Матриця Гурвиця складається наступним чином. На головній діагоналі виписуються коефіцієнти многочлена (4.49), починаючи з a_1 і закінчуючи a_n. Стовпці складаються почергово з коефіцієнтів тільки з непарними чи тільки з парними індексами, причому до числа останніх включаються коефіцієнт a_0. Всі інші елементи матриці, які відповідають коефіцієнтами з індексами, більшими за n чи меншими 0, вважаються рівними нулю. Головні діагональні мінори матриці Гцурвиця мають вигляд

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{.n} \end{vmatrix}.$$

Тобто за умови Гурвиця має місце: для стійкості розв'язку $y \equiv 0$ рівняння (4.48) необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$$
(4.51)

Оскільки $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$, умова Δ_{n-1} може бути замінена вимогою $a_n > 0$.

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння

$$y^{IV} + 5 \cdot y^{III} + 13 \cdot y^{II} + 19 \cdot y^{I} + 10 \cdot y = 0.$$
(4.52)

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + 5 \cdot \lambda^3 + 13 \cdot \lambda^2 + 19 \cdot \lambda + 10 = 0.$$

Тут $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10.$ Записуємо діагональні мінори Гурвиця

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$
$$\Delta_1 = 5 > 0,$$

тобто $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0.$ Це означає, що тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (52) асимптотичний стійкий.

4.7. Геометричний критерій стійкості (критерій Михайлова).

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n - го порядку з сталими коефіцієнтами

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0.$$
(4.53)

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$f(\lambda) \equiv a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$
(4.54)

Критерій Михайлова дає змогу визначити розташування коренів характеристичного рівняння (4.54) на комплексній площині і вирішити питання про стійкість нульового розв'язку рівняння (4.53). Поклавши $\lambda = i \cdot \omega$, отримаємо

$$f(i \cdot \omega) = u(\omega) + i \cdot v(\omega),$$

де

$u(\omega) = a_n - a_{n-2} \cdot \omega^2 + a_{n-4} \cdot \omega^4 - \ldots, \quad v(\omega) = a_{n-1} \cdot \omega - a_{n-3} \cdot \omega^3 + \ldots$.

Величину $f(i \cdot \omega)$ за умови заданого параметра ω можна зобразити як вектор на комплексній площині u, v з початком в початку координат. При зміні ω в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ кінець цього вектора описує певну криву – т.з. *криву Михайлова* (рис. 4.16).

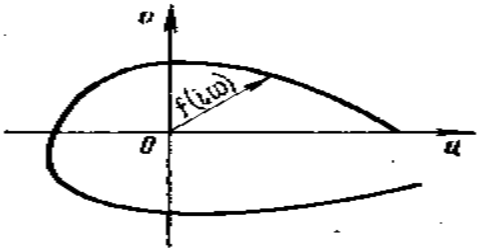


Рис. 4.16. Крива Михайлова.

Оскільки функція $u(\omega)$ парна, то крива Михайлова симетрична відносно осі Ou, тому достатньо побудувати частину кривої, яка відповідає зміні параметра ω від 0 до ∞. Якщо многочлен $f(\lambda)$ ступеня n має m коренів з додатною дійсною частиною і $n-m$ коренів з від'ємною, то кут φ повороту вектора $f(i \cdot \omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ дорівнює $\varphi = (n - 2 \cdot m) \cdot \frac{\pi}{2}$. Зрозуміло, що для стійкості розв'язку рівняння (4.53) необхідно і достатньо, щоб $n = 0$.

Критерій Михайлова. Для стійкості нульового $y \equiv 0$ розв'язку рівняння (4.53) необхідно і достатньо, щоб: 1) вектор $f(i \cdot \omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ здійснював поворот на кут $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$, тобто здійснив $\frac{n}{4}$ обертів проти часової стрілки; 2) годограф $f(i \cdot \omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ не проходів через початок $(0,0)$.

Зрозуміло, що для стійкості розв'язку рівняння (4.53) необхідно, щоб всі корені рівнянь $u(\omega) = 0, v(\omega) = 0$ були дійсними, і такими, що між будь-якими двома коренями одного рівняння повинен знаходитися корінь другого рівняння.

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $y \equiv 0$ рівняння $y^{IV} + y^{III} + 4 \cdot y^{II} + y^{I} + y = 0.$

Розв'язок. Складаємо характеристичний многочлен

$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4 \cdot \lambda + \lambda + 1.$

Далі,

$f(i\cdot\omega)=\omega^4-i\cdot\omega^2-4\cdot\omega^2+1,\ u(\omega)=\omega^4-4\cdot\omega^2+1,\ v(\omega)=-\omega^2+\omega=$
$=\omega\cdot(1-\omega)\cdot(1+\omega).$

Побудуємо криву (рис. 17) $\begin{cases} u=u(\omega), \\ v=v(\omega), \end{cases}$ $(0\le\omega<+\infty)$

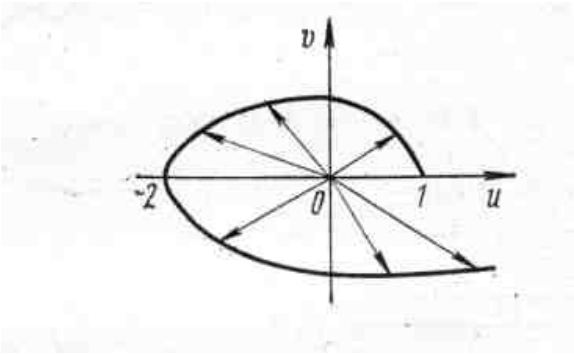


Рис. 4.17. Крива $\begin{cases} u=u(\omega), \\ v=v(\omega). \end{cases}$

ω	0	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
u	1	0	-2	0
v	0	+	0	-

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{v}{u}=0.$$

Кут повороту радіус-вектору $\varphi=4\cdot\frac{\pi}{2}=(n-2\cdot m)\cdot\frac{\pi}{2}.$ Звідки $n-2\cdot m=4$ і, оскільки $n=4,$ то $m=0,$ тобто всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині. Значить тривіальний розв'язок $y\equiv 0$ асимптотичний стійкий.

4.8. Рівняння з малим параметром при похідній.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x(t),\varepsilon),$$
(4.55)

де ε - параметр.

Якщо функція $F(t,x,\varepsilon)$ в деякій замкнутій області зміни t,x,ε, неперервна за сукупністю аргументів і задовольняє умову Ліпшиця за x:

$$\left|F(t,x_2,\varepsilon)-F(t,x_1,\varepsilon)\right|\le N\cdot\left|x_2-x_1\right|,$$

де N не залежить від t, x, ε, то розв'язок рівняння (4.55) неперервним чином залежить від ε. В багатьох задачах фізики розглядається рівняння типу:

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = f(t,x),$$
(4.56)

де ε - малий параметр. Розділимо обидві частини рівняння (56) на ε, приведемо його до вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot f(x,t),$$
(4.57)

звідки можна бачити, що права частина (4.57) терпить розрив при $\varepsilon = 0$, так що теоремою про неперервну залежність розв'язків від параметра ε скористатися в даному випадку неможливо. Питання ставиться так: за яких умов для малих значень $|\varepsilon|$ в рівнянні (4.56) можна відкинути член $\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt}$ і як наближення до розв'язку диференціального рівняння (54.6) розглядати розв'язок т.з. «виродженого рівняння»

$$f(t,x) = 0.$$
(4.58)

Нехай $\varepsilon > 0$, а вироджене рівняння (4.58) має лише один розв'язок $x = \varphi(t)$. В залежності від поведінки $f(x,t)$ поблизу розв'язку $x = \varphi(t)$ рівняння (58) розв'язок $x(t,\varepsilon)$ диференціального рівняння (4.56) за умови $\varepsilon \to 0$ прямує до розв'язку $x = \varphi(t)$ виродженого рівняння, або швидко віддаляється від нього. В першому випадку розв'язок $x = \varphi(t)$ рівняння (4.58) називають *стійким*, а в другому – *нестійким.*

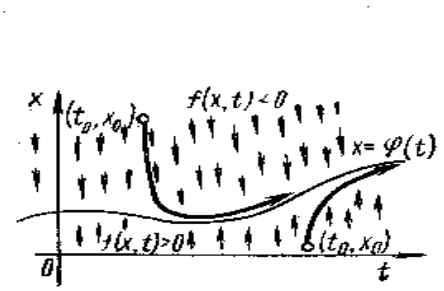


Рис. 4.18. До заміни розв'язку рівняння (4.56)

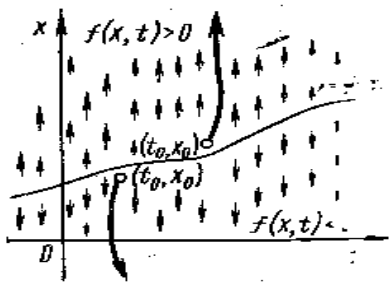


Рис. 4.19. До заміни розв'язку рівняння (4.58)

Якщо при переході через графік розв'язку $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння (4.58) функція $f(x,t)$ із зростанням x за умови фіксованого t змінює знак з «+» на «-», то розв'язок виродженого рівняння $x=\varphi(t)$ стійкий і ним можна наближено замінити розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (4.56), рис. 4.18. Якщо ж функція $f(x,t)$ змінює знак з «-» на «+», то розв'язок $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння (4.58) нестійкий і замінювати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ диференціального рівняння (4.56) розв'язком виродженого рівняння (4.58) неможна, рис. 4.19.

Достатні умови стійкості чи нестійкості виражаються наступним чином: 1) Якщо $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}<0$ на розв'язку рівняння (4.58), то розв'язок $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння стійкий; 2) Якщо $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}>0$ на розв'язку рівняння (4.58), то розв'язок $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння нестійкий.

Якщо вироджене рівняння $f(x,t)$=0 (4.58) має декілька розв'язків $x=\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, то кожний з них слід дослідити на стійкість. Поведінка інтегральних кривих диференціального рівняння (4.56) за умови $\varepsilon\to 0$ може бути різним в залежності від вибору початкових умов – початкової точки (t_0,x_0). Можливий напівстійкий випадок, коли функція $f(x,t)$ при переході через криву $x=\varphi(t)$ не змінює знаку (наприклад, якщо $x=\varphi(t)$ є коренем парної кратності виродженого рівняння (4.56). В цьому випадку за умови малого ε інтегральні криві рівняння (4.56) з одного боку кривої $x=\varphi(t)$ прямують до цієї кривої, а з іншого віддаляються від неї. В першому випадку кажуть, що початкова точка (t_0,x_0) належить області притягання напівстійкого розв'язку $x=\varphi(t)$, а в іншому – відштовхування. В напівстійкому випадку, як правило, неможна замінювати розв'язок вихідного рівняння (4.56) розв'язком виродженого рівняння (4.58). Можна вказати критерії, коли інтегральні криві рівняння (4.56) за умови відповідного вибору початкової точки (t_0,x_0) наближаються до розв'язку $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння і залишаються в його околі за умови $t>t_0$, проте це справедливо лише за відсутності збурень рівняння (4.56). Наведемо ці критерії.

Нехай в околі напівстійкого розв'язку $x=\varphi(t)$ виродженого рівняння (4.58) функція $f(x,t)\geq 0$. Якщо $\varphi'(t)>0$, то інтегральні криві рівняння (4.56) , які наближаються до кривої $x=\varphi(t)$ не можуть перетнути цю криву і залишаються в її околі за умови $t>t_0$ (початкова точка (t_0,x_0) повинна знаходитися в області притягання напівстійкого розв'язку $x=\varphi(t)$; якщо (t_0,x_0) знаходиться в області відштовхування, то відповідна інтегральна крива рівняння (4.56) швидко віддаляється від кривої $x=\varphi(t)$, рис. 4.20.

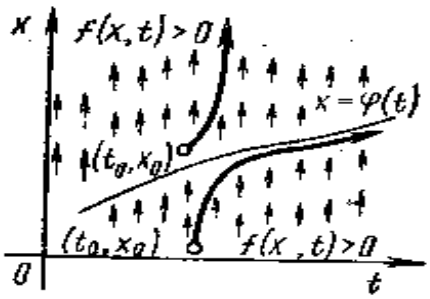


Рис. 4.20. Ілюстрація віддалення від кривої $x = \varphi(t)$.

Якщо $\varphi'(t) < 0$, то інтегральні криві, які наближаються до графіку функції $x = \varphi(t)$, перетнуть його і з іншого боку кривої $\varphi'(t) < 0$ за умови $t > t_1$, то за умови достатньо малого ε інтегральні криві, які виходять з точки (t_0, x_0), яка належить області притягання кореня $x = \varphi(t)$, залишаються поблизу кривої $x = \varphi(t)$ за умови $t_0 + \delta < t < t_1, \delta > 0;$ в околі точки $t = t_1$ вони перетинають криву $x = \varphi(t)$ а далі віддаляються від неї. Якщо в околі напівстійкого розв'язку $x = \varphi(t)$ функція $f(x,t) \le 0$, то для справедливості сформульованих тверджень знаки у похідної $\varphi'(t)$ слід замінити на протилежні.

Приклад. *З'ясувати, чи прямує розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$ *в рівнянні*

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = t^2 - x, \qquad \varepsilon > 0, \tag{4.59}$$

яке задовольняє початкову умову $x\big|_{t=t_0} = x_0$, *до розв'язку виродженого рівняння* $x = t^2$ *за умови* $t > t_0$ *та* $\varepsilon \to 0$.

Розв'язок. *Маємо* $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial (t^2 - x)}{\partial x} = -1 < 0$, *тобто розв'язок виродженого рівняння* $x = t^2$ *стійкий, а розв'язок вихідного рівняння* $x = x(t, \varepsilon)$, *який виходить з будь-якої початкової точки* (t_0, x_0), *прямує до розв'язку виродженого рівняння за умови* $\varepsilon \to 0$ *та* $t > t_0$, *рис. 4.21. В цьому можна переконатися безпосередньою перевіркою. Розв'язуючи диференціальне рівняння (4.59) як лінійне неоднорідне, за умови заданої початкової умови* $x\big|_{t=t_0} = x_0$ *знайдемо:*

$$x(t, \varepsilon) = (x_0 - t_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot t_0 - 2 \cdot \varepsilon^2) \cdot e^{-\frac{t - t_0}{\varepsilon}} + t^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot t + 2 \cdot \varepsilon^2,$$

звідки безпосередньо видно, що за умови $t > t_0$, *тобто* $t - t_0 > 0$ *та* $\varepsilon \to 0$ *маємо* $x(t, \varepsilon) \to t^2$.

Приклад. *Дослідити на стійкість розв'язок виродженого рівняння для рівняння:*

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = x \cdot (e^x - 2).$$

Розв'язок. *Вироджене рівняння* $x \cdot (e^x - 2) = 0$ *має два розв'язки: 1)* $x = 0$, *2)* $x = \ln 2$. *Маємо* $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (e_x - 2 + x \cdot e^x)\Big|_{x=0} = -1$, *так що розв'язок* $x = 0$ *стійкий;* $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\ln 2} = (e^x - 2 + x \cdot e^x)\Big|_{x=\ln 2} = 2 \cdot \ln 2 > 0$, *так що розв'язок* $x = \ln 2$ *виродженого рівняння нестійкий, рис.4. 22.*

Приклад. *Дослідити на стійкість розв'язок виродженого рівняння, яке відповідає рівнянню* $\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = (x - t)^2$.

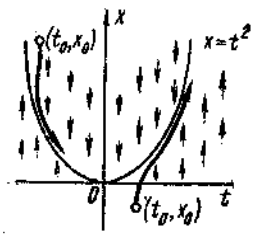


Рис. 4.21.

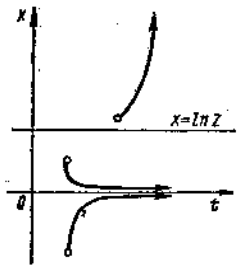


Рис. 4.22.

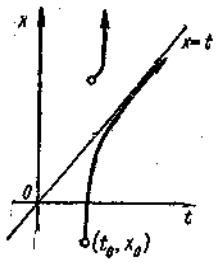


Рис. 4.23.

Вироджене рівняння $(x - t)^2 = 0$ *має корінь* $x = t$ *другої кратності. Функція* $f(x,t) \equiv (x - t)^2 > 0$ *в околі цього кореня,* $\varphi(t) = t, \varphi'(t) = 1 > 0$. *Тобто розв'язок* $x = t$ *- напівстійкий, і якщо початкова точка* (t_0, x_0) *знаходиться в півплощині під прямою* $x = t$ *(область притягання кореня* $x = t$*), то інтегральна крива* $x = x(t, \varepsilon)$, *буде за умови* $t > t_0$ *залишатися в околі лінії* $x = t$, *рис. 4.23.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Згуровский М.З. Современная теория управления: Учебное пособие. – К.: Вища школаБ 1989.- 108 с.
2. Боровська Т.М. Основи теорії управління та дослідження операцій.- Вінниця, ВПІ, 242 с.
3. Ковриков А.М. Основы теории управления: Учебное пособие. - Томск, ТПИБ 1999.- 191 с.
4. Усов А.В. Введение в методы оптимизации и теорию технических систем: Учебное пособие, Одесса, 2005. – 439 с.
5. Нефедов Ю.М. Теория управления: Учебное пособие. – Луганск, ЛПИ, 2003. – 225 с.
6. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Изд-во «Мир», 1973. – 322 с.
7. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». – М.: Высш. шк., 1990. -. 335 с.
8. Якушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-ч книгах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Кн. 1. – 350 с., Кн. 2, - 285 с.
10. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П. Спеціальні розділи вищої математики: нечіткі множини, нечітка логіка та основи теорії наближених міркувань, двійкові динамічні системи, теорія випадкових процесів і функцій, прикладна теорія катастроф. – К.: Фенікс, 2006. – 416 с.
11. Краснов М.Л. и др. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. Пособие для втузов./М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И. Макаренко. – 3-е изд.. перераб. и доп.. – М.: Высш. школа, 1978. – 278 с.

ЗМІСТ

Вступ……
……3
1. Предмет теорії управління, кібернетичні
поняття……5
1.1. Поняття
управління……..
……..5
1.2. Процеси та
сигнали…….
……7
1.3. Кібернетичні
блоки……
……..10
1.4. Кібернетичні
системи……
…….12
1.5. Дискретно-неперервні (цифрові)
системи……13
1.6. Кібернетика та предмет теорії автоматичного
управління……..…16
1.7. Структурна та функціональні компоненти
САУ……..……17
1.7.1. Функціональні компоненти систем
управління…….17
1.7.2. Управління положенням кінематичного механізму. Укрупнена схема
управління…….……
……..20
1.8. Задачі управління складними системами. Локальні задачі
Управління……
……...25
1.8.1. Одноканальне управління та якість
системи……...28
1.8.2. Блоки та канали управління. Регулятори та блоки
задавання……33
1.8.3. Спеціальні задачі та блоки систем
управління……37
2. Математичні моделі типу вхід-
вихід……..…….40
2.1. Лінійні моделі, перехідні процеси, характеристики моделей. Структурні
схеми……..……
……..40

2.2. Багатоканальні моделі……..….46
2.3. Моделі збурених систем…….……49
2.4. Перехідні процеси та характеристики моделей вхід-вихід……..51
2.5. Елементарні ланки…….60
2.6. Побудова моделей вхід-вихід……..……67
3. Математичні моделі типу вхід-стан-вихід……..72
3.1. Поняття простору станів та моделі типу вхід-стан-вихід……72
3.2. Моделі керованих систем……82
3.3. Фазові траєкторії автономної системи другого порядку……90
3.4. Еквівалентні перетворення…….97
3.5. Керованість та спостережуваність лінійних систем……102
4. Методи дослідження стійкості систем……105
4.1. Стійкість за Ляпуновим, основні поняття та означення……105
4.2. Найпростіші типи точок спокою……109
4.3. Метод функцій Ляпунова……..……114
4.4. Стійкість за першим наближенням……118
4.5. Стійкість розв’язку диференціальних рівнянь по відношенню до зміни правих частин рівняння……122
4.6. Критерій Рауса-Гурвіца……124

4.7. Геометричний критерій стійкості (критерій Михайлова)…….126
4.8. Рівняння з малим параметром при похідній…….128
ЛІТЕРАТУРА……132